

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos

Pedro Infante Moreira

Tomo 4



ESPOCH
2016

**Electromagnetismo básico
e introducción a los circuitos eléctricos**

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos

Tomo 4

Pedro Infante Moreira



**Electromagnetismo básico
e introducción a los circuitos eléctricos**

© 2015 Pedro Infante Moreira

© 2015 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2

Instituto de investigación

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego
(*peer review*).

Corrección y diseño:

La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa
autorización por escrito de los propietarios del Copyright.

CDU: 537 + 621.3

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos. Tomo 4.

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Instituto de Investigaciones; 2015

84 p. vol: 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-14-228-3

1. Física
2. Circuitos eléctricos
3. Electricidad
4. Electromagnetismo

CONTENIDO TOMO 4

Capítulo 9. Ley de Ampere. Ley de Biot-Savart	9
9.1 Determinación experimental de la Ley de Ampere	9
9.2 Fuerzas entre conductores paralelos	17
9.3 Campo magnético de un solenoide	20
9.4 Campo magnético en el interior de un toroide.....	23
9.5. Ley de Biot-Savart	24
9.6 Ejercicios de aplicación	26
Capítulo 10. Ley de inducción de Faraday.....	53
10.1 Flujo de campo magnético	53
10.2 Verificación experimental de la Ley de Inducción de Faraday...	56
10.3 Cambio de flujo del campo magnético	58
10.4 Fuerza electromotriz debida al movimiento	61
10.5 Ley de Inducción de Faraday	64
10.6 Ley de Lenz	67
10.7 Ejercicios de aplicación	68
Referencias	83

CAPÍTULO 9

LEY DE AMPERE. LEY DE BIOT-SAVART

9.1 Determinación experimental de la Ley de Ampere

La figura 9.1 muestra un alambre rodeado por un imán pequeño. Si no hay corriente en el alambre (figura 9.1(a)), el campo magnético \mathbf{B} es igual a cero, entonces el imán se encuentra alineado con el campo magnético de la Tierra. Cuando circula una corriente i por el alambre, esta crea un campo magnético en su entorno y el imán se alinea con este campo \mathbf{B} (figura 9.1(b)); es decir, apunta en la misma dirección del campo magnético creado por la corriente i .

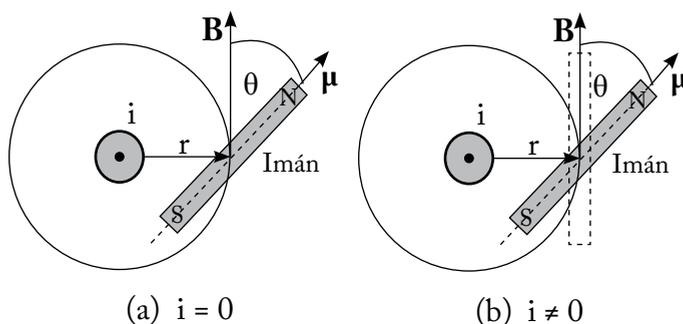


Figura 9.1. a) Un imán (brújula) cerca de un alambre por el cual la corriente i es igual a cero, el punto indica que la corriente sale perpendicularmente de la hoja; b) por el alambre circula una corriente i diferente de cero; entonces produce un campo magnético \mathbf{B} en su entorno, y el imán se alinea con este campo.

Este experimento hipotético que de hecho está muy relacionado con otros que realmente se llevaron a cabo. El experimento consiste en medir \mathbf{B} a diversas distancias r de un alambre recto, largo, de sección transversal circular y que lleva una corriente i . Se puede hacer efectuando cuantitativamente la observación cualitativa de la figura 9.1.

Pongamos una pequeña brújula (imán) a una distancia r del alambre. Esta brújula, que es un dipolo magnético, tiende a alinearse en un campo magnético externo (figura 9.1(b)), con su polo norte, apuntando en la dirección \mathbf{B} . En la figura 9.1(b), se ve claramente que \mathbf{B} , en el sitio en donde está el dipolo, es tangente a un círculo de radio r con centro en el alambre.

Si se invierte la dirección de la corriente en el alambre de la figura 9.1, el imán da media vuelta. Este resultado experimental conduce a la “regla de la mano derecha”, para encontrar la dirección de \mathbf{B} cerca de un alambre que lleva una corriente i . Se coge el alambre con la mano derecha, con el pulgar apuntando en dirección de la corriente, entonces, la curvatura de los dedos alrededor del alambre indica la dirección de \mathbf{B} .

Al circular una corriente i intensa por el alambre, se crea un campo magnético \mathbf{B} en su contorno. Debido a este campo magnético, el imán tiende a alinearse (figura 9.1(b)) produciendo un torque magnético; esto es:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

$$\tau = \mu B \text{Sen } \theta$$

$$B = \frac{\tau}{\mu \text{Sen } \theta}$$

Donde, $\mu = iNA$ y B es directamente proporcional a $\frac{\tau}{\text{Sen } \theta}$. Esto es:

$$B \propto \frac{\tau}{\text{sen } \theta} \quad (9-1)$$

Con la ecuación (9-1), podemos obtener una medida relativa de B para diversas distancias r y para diversas corrientes i en el alambre. Los resultados experimentales obtenidos de las tablas 9.1 y 9.2, y de las figuras 9.2 y 9.3, se pueden describir por la proporcionalidad de la ecuación (9-2), que se demuestra utilizando el procedimiento de los literales a y b. Esto es,

$$B \propto \frac{i}{r} \tag{9-2}$$

- a) Manteniendo constante el radio r , para diferentes valores de la corriente i , obtenemos diferentes valores de τ y θ , los cuales se encuentran tabulados en la tabla 9.1. Con estos datos, realizamos la gráfica que se encuentra en la figura 9.2.
- b) Manteniendo constante la corriente i , para diferentes valores del radio r , obtenemos diferentes valores de τ y θ , los cuales se encuentran tabulados en la tabla 9.2. Con estos datos, realizamos la gráfica que se encuentra en la figura 9.3.

τ	θ	i	$r = \text{cte.}$
τ_1	$\text{Sen } \theta_1$	i_1	
τ_2	$\text{Sen } \theta_2$	i_2	
\cdot	\cdot	\cdot	
\cdot	\cdot	\cdot	
\cdot	\cdot	\cdot	
τ_n	$\text{Sen } \theta_n$	i_n	

Tabla 9.1. Valores i, θ, τ , con $r = \text{cte.}$

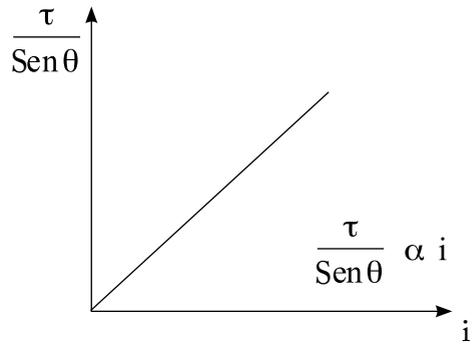


Figura 9.2. Gráfico de $\frac{\tau}{\text{Sen } \theta}$ vs. i

τ	θ	r	$i = \text{cte.}$
τ_1	$\text{Sen } \theta_1$	r_1	
τ_2	$\text{Sen } \theta_2$	r_2	
\cdot	\cdot	\cdot	
\cdot	\cdot	\cdot	
\cdot	\cdot	\cdot	
τ_n	$\text{Sen } \theta_n$	r_n	

Tabla 9.2. Valores r, θ, τ , con $i = \text{cte.}$

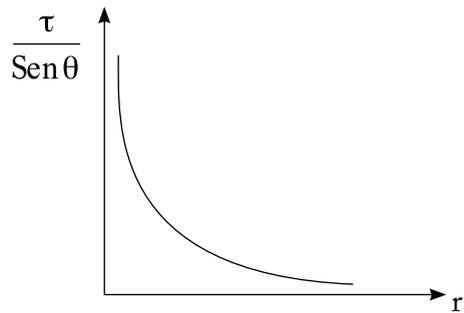


Figura 9.2. Gráfico de $\frac{\tau}{\text{Sen } \theta}$ vs. r

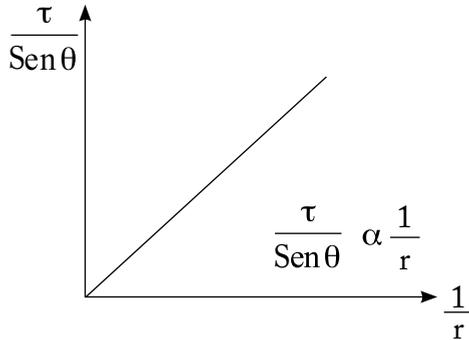


Figura 9.4. Linealizando el gráfico de la figura 9.3

Considerando la figura 9.3, procedemos a linealizar y lo representamos en la figura 9.4. En las figuras 9.3 y 9.4, el factor $\frac{\tau}{\text{Sen } \theta}$ es directamente proporcional a la corriente i e inversamente proporcional a la distancia r ; esto es: $\frac{\tau}{\text{Sen } \theta} \propto \frac{i}{r}$.

Pero de acuerdo con la ecuación (9-1), el campo magnético B es proporcional al factor $\frac{\tau}{\text{Sen } \theta}$; entonces, $B \propto \frac{i}{r}$. Con esto queda demostrada la ecuación (9-2).

Podemos convertir esta proporcionalidad en una igualdad introduciendo una constante de proporcionalidad. Esto es:

$$B = \text{cte.} \frac{i}{r}$$

De acuerdo con los datos obtenidos en el laboratorio, $\text{cte.} = \mu_0/2\pi$
 $\mu_0 =$ constante de permeabilidad en el vacío

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Weber}}{\text{amp} - \text{m}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \text{ si se escribe de otra forma, tenemos:}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \tag{9-3}$$

El primer miembro de la ecuación (9-3) es la integral cerrada de línea ($\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$), para una trayectoria constituida por un círculo de radio r con centro en el alambre. En efecto, para todos los puntos de este círculo, \mathbf{B} tiene la misma magnitud B (constante), y $d\mathbf{l}$ que es siempre tangente a la trayectoria de integración, apunta en la misma dirección que \mathbf{B} , como se ve en la figura 9.5. Entonces:

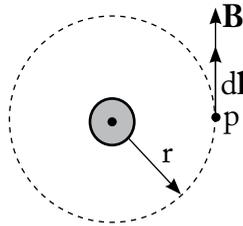


Figura 9.5. Una trayectoria circular de integración rodeando un alambre. El punto en el centro indica que la corriente i en el alambre sale de la figura.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B dl \cos 0^\circ = \int_0^{2\pi} B dl = B \int_0^{2\pi} dl = B(2\pi r)$$

$\oint dl$ es simplemente la circunferencia del círculo, por consiguiente, en este caso especial, podemos escribir la relación observada experimentalmente entre el campo y la corriente como sigue:

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$, si consideramos n corrientes que están encerradas por la trayectoria circular, entonces, tenemos la ecuación (9-4) que representa la ley de Ampere.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_n \quad \text{Ley de Ampere} \tag{9-4}$$

Demostrar que la ley de Ampere es válida para cualquier tipo de trayectoria, la misma que representamos en la figura 9.6.

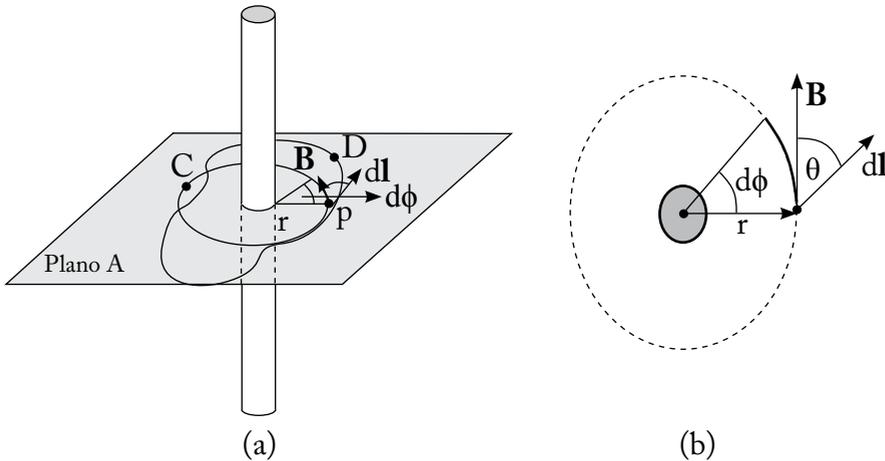


Figura 9.6. (a) La corriente i que circula en el alambre produce un campo magnético \mathbf{B} en su entorno. En el plano A existen dos trayectorias cerradas, la trayectoria C es un círculo de radio r con centro en i y la trayectoria D no es un círculo. b) Ampliación del punto p de (a).

Tomando la trayectoria irregular D en el punto p, trazamos el vector $d\mathbf{l}$ tangente a esta trayectoria. Este vector va a tener dos componentes: $d\mathbf{l} \cos \theta$ y $d\mathbf{l} \sin \theta$. Pero $d\mathbf{l} \cos \theta$ coincide con la tangente a la trayectoria C del círculo de radio r ; por tanto:

$$d\mathbf{l} \cos \theta = B$$

$d\mathbf{l} \cos \theta = r d\phi$, utilizando la ecuación (9-4), tenemos:

$$\int B d\mathbf{l} \cos \theta = \int B r d\phi = \mu_0 i$$

pero, $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$; si reemplazamos, queda de la siguiente manera:

$$\int B dl \cos \theta = \int \frac{\mu_0 i}{2\pi r} r d\phi = \int \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} |\phi|_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (2\pi - 0) = \mu_0 i$$

Con esto hemos demostrado que cualquier trayectoria que tomemos siempre va a ser igual a $\mu_0 i$; esto es:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

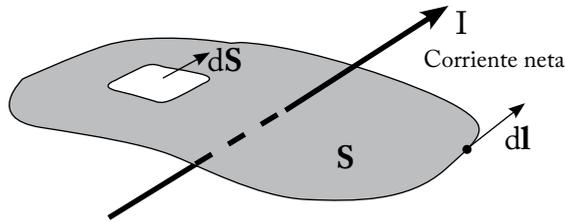


Figura 9.7. Por la superficie S, atraviesa una corriente eléctrica I.

Enunciado de la ley de Ampere: sea una superficie abierta arbitraria S (figura 9.7) con su curva limitadora l , en una región del espacio por la que pasan ciertas corrientes eléctricas. Los componentes del campo \mathbf{B} a lo largo de la curva l están relacionados con la corriente neta I, que pasa por S en su sentido hacia fuera, por medio de la expresión:

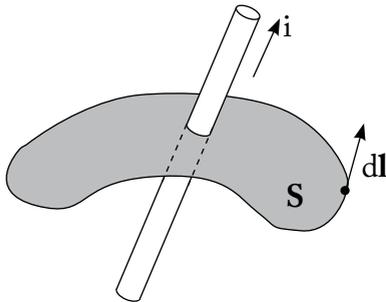
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_n$$

Donde,

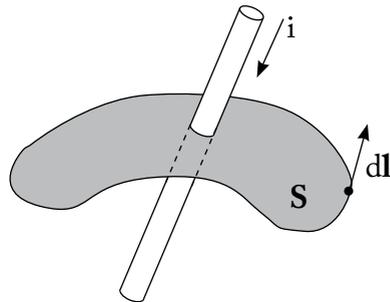
- \oint : integral cerrada de la línea
- i_n : corriente neta que atraviesa la superficie S, que describe la trayectoria cerrada dl
- μ_0 : constante de permeabilidad en el vacío

$$\mu_0 : 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}; \left[\frac{\text{weber}}{\text{Am} - \text{m}} \right]$$

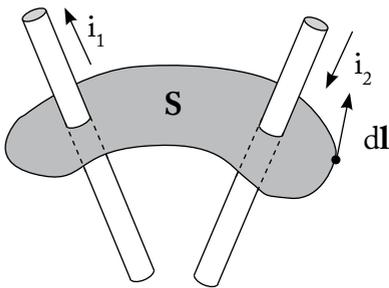
La figura 9.8 muestra algunos ejemplos de la ley de Ampere.



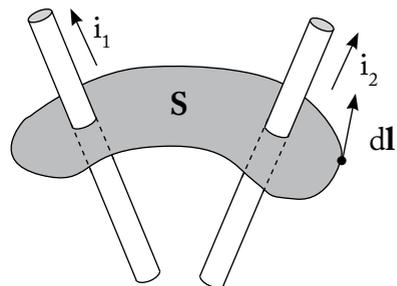
(a) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$



(b) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 i$



(c) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i_1 - i_2)$



(d) $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i_1 + i_2)$

Figura 9.8. a), b), c) y d) son ejemplos de la ley de Ampere.

Por lo tanto, la ley de Ampere es válida para: a) cualquier configuración de campo magnético, b) cualquier conjunto de corrientes y c) cualquier trayectoria de integración.

9.2 Fuerzas entre conductores paralelos

La figura 9.9 muestra dos alambres largos paralelos, separados una distancia d y que llevan corrientes i_1 e i_2 .

La corriente i_1 produce un campo magnético B_1 , sobre el alambre con corriente i_2 . La corriente i_2 produce un campo magnético B_2 , sobre el alambre con corriente i_1 . Procedemos a calcular la fuerza magnética F_1 sobre el alambre conductor que lleva la corriente i_1 (figura 9.9(b)), producida por el campo magnético B_2 ; entonces, tenemos:

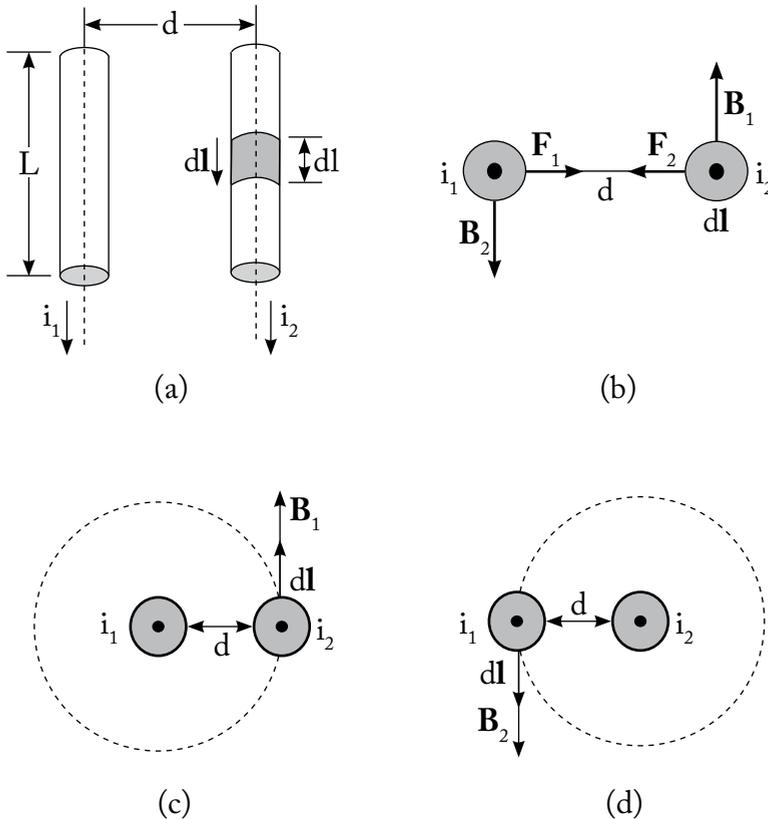


Figura 9.9. (a) Dos alambres paralelos que llevan corrientes paralelas se atraen entre sí; (b) corrientes saliendo del plano; (c) cálculo de B_1 y (d) cálculo de B_2 .

$$\mathbf{F}_1 = i_1 \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_2$$

$$F_1 = i_1 \int_0^L dl B_2 \text{Sen} 90^\circ = i_1 B_2 \int_0^L dl = i_1 B_2 L$$

$$F_1 = i_1 L B_2 \quad (9-5)$$

De igual forma, procedemos a calcular la fuerza magnética F_2 sobre el alambre conductor que lleva la corriente i_2 (figura 9.9(b)), producida por el campo magnético B_1 ; entonces, tenemos:

$$F_2 = i_2 \int_0^L dl B_1 \text{Sen} 90^\circ = i_2 B_1 \int_0^L dl = i_2 B_1 L$$

$$F_2 = i_2 L B_1 \quad (9-6)$$

Para calcular el campo magnético B_1 , aplicamos la ley de Ampere en la figura 9.9(c); esto es:

$$\oint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_1$$

$$\int B_1 dl \text{Cos} 0^\circ = \mu_0 i_1$$

$$B_1 \int_0^{2\pi d} dl = \mu_0 i_1$$

$$B_1 \int_0^{2\pi d} dl = \mu_0 i_1$$

$$B_1 (2\pi d) = \mu_0 i_1$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \quad (9-7)$$

Para calcular el campo magnético B_2 , aplicamos la ley de Ampere en la figura 9.9(d), esto es:

$$\oint \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_2$$

$$\int B_2 dl \cos 0^\circ = \mu_0 i_2$$

$$B_2 \int_0^{2\pi d} dl = \mu_0 i_2$$

$$B_2 |l|_0^{2\pi d} = \mu_0 i_2$$

$$B_2 (2\pi d) = \mu_0 i_2$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} \quad (9-8)$$

Reemplazando (9-8) en (9-5), encontramos la magnitud de la fuerza F_1 :

$$F_1 = i_1 L B_2$$

$$F_1 = i_1 L \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}$$

$$F_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}$$

Reemplazando (9-7) en (9-6), encontramos la magnitud de la fuerza F_2 :

$$F_2 = i_2 L B_1$$

$$F_2 = i_2 L \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

$$F_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}$$

9.3 Campo magnético de un solenoide

Un alambre circular que lleva una corriente i produce un campo magnético \mathbf{B} , tal como se muestra en la figura 9.10(a).

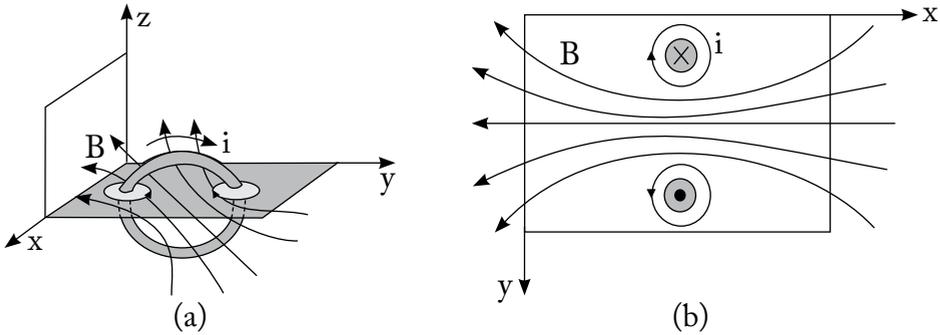


Figura 9.10. a) Anillo circular en el plano xy , por el cual circula una corriente i ; b) corte transversal del anillo en el plano xy , visto por el lado inferior de (a)

Un solenoide es un alambre largo enrollado en forma de espiras, que lleva una corriente i (figura 9.11(a)).

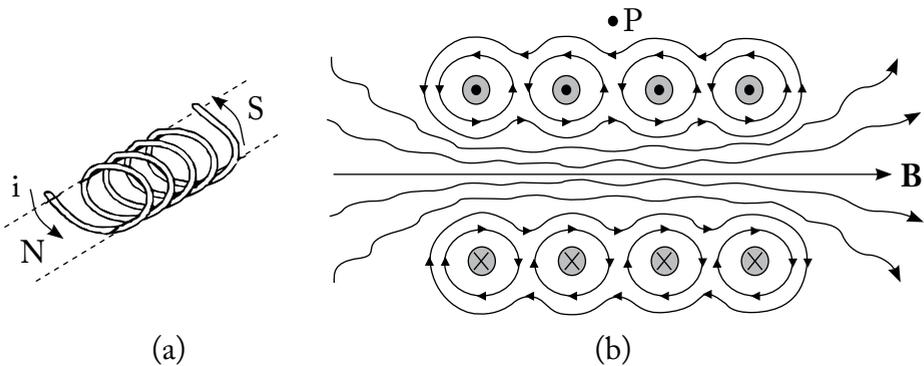


Figura 9.11. Un solenoide de espiras separadas. (a) Solenoide de espiras circulares; (b) corte transversal de (a)

Suponemos que la longitud de las espiras L es muy larga en comparación con su diámetro. Para puntos cercanos a una espira determinada del solenoide, el observador no se da cuenta de que el alambre está doblado en un arco. El alambre se comporta magnéticamente casi como un alambre recto largo, y las líneas de \mathbf{B} debidas a esta sola espira son casi círculos concéntricos.

El campo del solenoide es la suma vectorial de los campos producidos por todas las vueltas que constituyen el solenoide. La figura 9.11, que muestra un solenoide con espiras ampliamente espaciadas, sugiere que los campos tienden a anularse entre los alambres. Sugiere también que, en puntos dentro del solenoide y razonablemente lejos de los alambres, \mathbf{B} es paralelo al eje del solenoide, como se puede apreciar en la figura 9.11(b), la cual es un corte transversal de la figura 9.11(a).

En el caso de que las espiras estén muy pegadas, las líneas de campo magnético se mejoran, tal como se muestra en la figura 9.12 en un corte transversal.

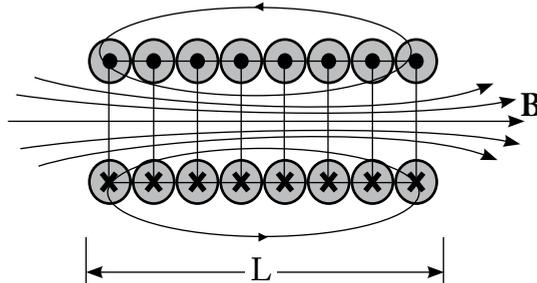


Figura 9.12. Corte transversal, cuando las espiras de la figura 9.11 están muy pegadas.

Para puntos tales como el p de la figura 9.11(b), el campo producido por la parte superior de las espiras del solenoide (marcados O) apunta hacia la izquierda y tiende a anular el campo producido por la parte inferior de las espiras del solenoide (marcados X), que apunta hacia la derecha. Conforme el solenoide se hace más y más ideal es decir, la longitud del cilindro es muy grande con respecto al diámetro, entonces el campo de inducción

en los puntos exteriores tiende a cero. Cuando L tiende al infinito, el campo magnético \mathbf{B} en el interior del solenoide es constante y en el exterior es cero (figura 9.13).

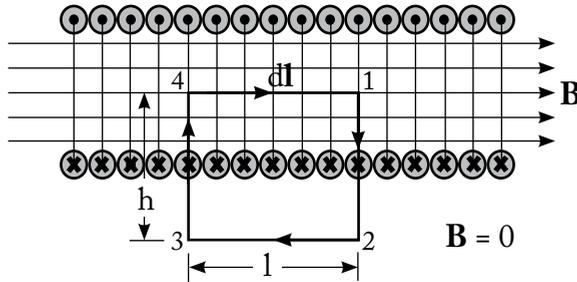


Figura 9.13. Una sección de un solenoide cuando $L \rightarrow \infty$

Aplicando la ley de Ampere a la trayectoria 1, 2, 3 y 4 de la figura 9.13, tenemos:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i'$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 B dl \cos 90^\circ + \int_2^3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 B dl \cos 90^\circ + \int_4^1 B dl \cos 0^\circ$$

En la trayectoria 2-3, la integral es cero, debido a que $B = 0$.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_4^1 B dl = \mu_0 i'$$

$$B \int_4^1 dl = \mu_0 i'$$

La corriente neta i' que pasa por el área limitada por la trayectoria de integración no es la misma que la corriente i en el solenoide, porque la trayectoria de integración encierra más de una vuelta. Si es n el número de

vueltas por unidad de longitud, significa que $i' = i (n l)$, $n = N/L$, $N =$ número de vueltas o espiras, $L =$ longitud, entonces:

$$B l = \mu_0 i n l$$

$$B = \mu_0 i n$$

$$B = \mu_0 i n \tag{9-9}$$

La ecuación (9-9) sirve para calcular el valor de la inducción magnética B en el interior de un solenoide.

9.4 Campo magnético en el interior de un toroide

La figura 9.14 muestra un toroide, que puede considerarse como un solenoide de longitud finita doblado en forma de una rosca.

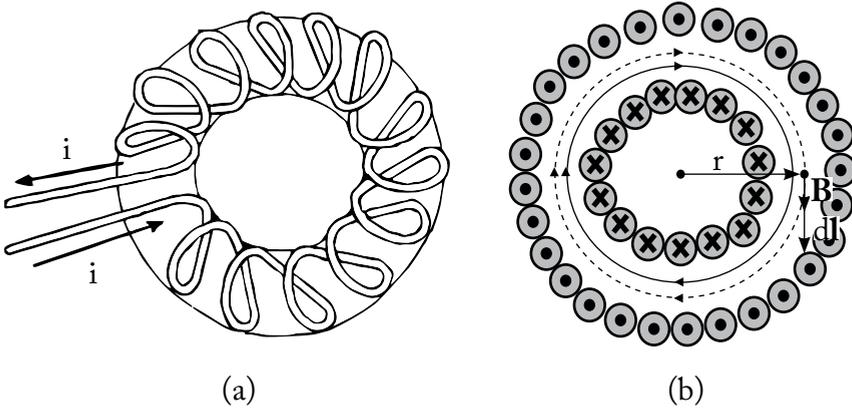


Figura 9.14 (a) Un toroide, (b) corte transversal del toroide

Para calcular el campo magnético en el interior del toroide, utilizamos la ley de Ampere; entonces tenemos:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_{neta}$$

$i_{\text{neta}} = Ni$, siendo N = número de espiras

$$\int_0^{2\pi r} B dl \cos 0^\circ = \mu_0 Ni$$

$$B \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 Ni$$

$$B (2\pi r) = \mu_0 Ni$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \quad (9-10)$$

La ecuación (9-10) sirve para calcular el valor de la inducción magnética B en el interior de un toroide.

9.5 Ley de Biot-Savart

Para calcular el campo magnético \mathbf{B} en un punto cualquiera, debido a una distribución arbitraria de corrientes, dividimos la distribución de corrientes en elementos de corriente y, aplicando la ley de Biot y Savart (que describiremos a continuación), calculamos las contribuciones $d\mathbf{B}$ al campo, aportadas por cada elemento de corriente en el punto considerado. Encontramos el campo \mathbf{B} en ese punto, integrando las contribuciones al campo para toda la distribución.

En la figura 9.15, cogemos un diferencial de longitud dl sobre el alambre conductor que lleva una corriente i . Esta corriente en el diferencial dl produce un diferencial de campo magnético $d\mathbf{B}$ en el punto p , a una distancia r ; su dirección es tangente a la trayectoria circular aplicando el criterio del producto cruz entre los vectores $d\mathbf{l} \times \hat{\boldsymbol{\mu}}$.

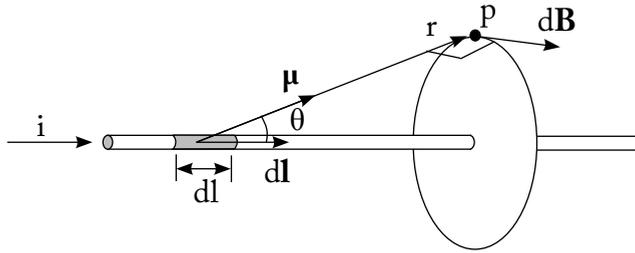


Figura 9.15. El elemento de corriente dl produce una aportación al campo magnético $d\mathbf{B}$ en el punto p .

Para calcular el diferencial de campo magnético $d\mathbf{B}$ en el punto p , utilizamos la fórmula de la ley de Biot-Savart que se muestra en la ecuación (9-11).

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\boldsymbol{\mu}}}{r^2} \quad (9-11)$$

Aquí $\boldsymbol{\mu}$ es un vector unitario, que va dirigido desde el diferencial de longitud dl hasta el punto p , en el cual se quiere calcular el $d\mathbf{B}$; y θ es el ángulo entre el vector unitario y el $d\mathbf{l}$. La dirección de $d\mathbf{B}$ es la del vector $d\mathbf{l} \times \boldsymbol{\mu}$. En la figura 9.15, el vector $d\mathbf{B}$ forma un ángulo de 90° con el vector $\boldsymbol{\mu}$. El vector $d\mathbf{B}$, siempre forma un ángulo recto entre $\boldsymbol{\mu}$ y $d\mathbf{l}$, tal como se muestra en la figura 9.16. La magnitud de $d\mathbf{B}$ está dada por la siguiente expresión:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \text{ Sen } \theta}{r^2}$$

El vector unitario $\boldsymbol{\mu}$ está en la misma dirección y sentido del vector \mathbf{r} . Entre estos dos vectores forman un ángulo θ . El campo resultante en el punto p se encuentra integrando esta ecuación; es decir:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$$

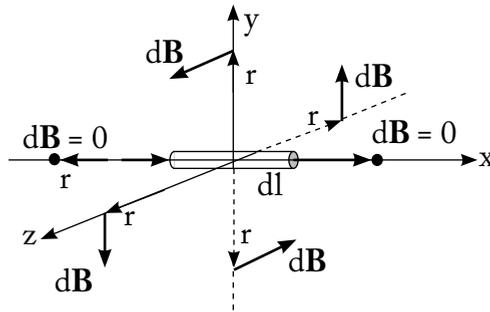


Figura 9.16. Dirección del campo magnético $d\mathbf{B}$ en el plano xyz , producido por un alambre conductor.

9.6 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 9)

Problema 9.1: en la figura 9.17, fluye una corriente uniforme i por un cilindro de radio a y otra corriente idéntica i en un alambre delgado cercano. Mediante la utilización de la ley de Ampere, evaluar la integral de línea $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sobre cada una de las trayectorias A, B, C y D, con el sentido especificado en la figura 9.17.

Solución:

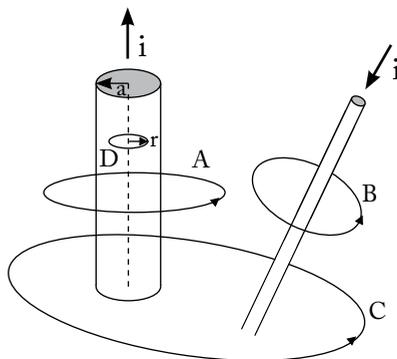


Figura 9.17. Trayectorias A, B, C y D

En la trayectoria A, la corriente neta encerrada es i ; entonces:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

En la trayectoria B, la corriente neta encerrada es $-i$; entonces:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (-i)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 i$$

En la trayectoria C, la corriente neta encerrada es $(i-i)$, entonces:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i - i)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

En la trayectoria D, la corriente neta encerrada es i' , entonces:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i'$$

$$i' = j A' = j \pi r^2 \quad \rightarrow \quad j = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi a^2}$$

$$i' = \frac{i}{\pi a^2} \pi r^2 \quad \rightarrow \quad i' = i \frac{r^2}{a^2}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \frac{r^2}{a^2}$$

Problema 9.2: “Un cable largo coaxial está formado por dos conductores concéntricos, de las dimensiones mostradas en la figura 9.18 (a); existen corrientes i iguales y opuestas en los conductores; a) obtener la inducción magnética \mathbf{B} a la distancia r dentro del conductor interior ($r < a$); b) encontrar la inducción magnética entre los dos conductores ($a < r < b$); c) obtener \mathbf{B} , dentro del conductor exterior ($b < r < c$); y d) encontrar \mathbf{B} , fuera del cable ($r > c$)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1076).

Solución:

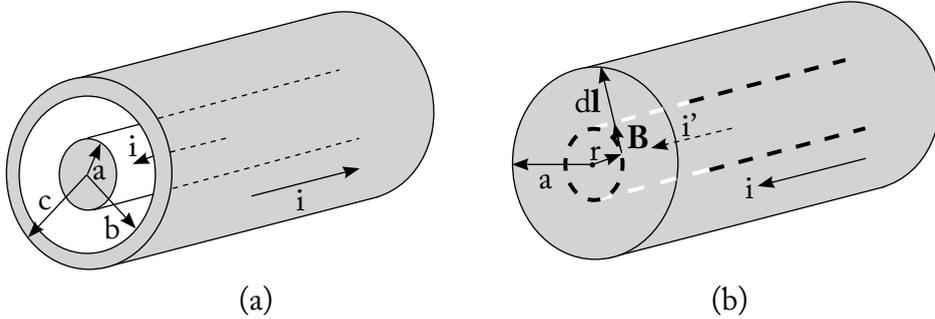


Figura 9.18. (a) dos cilindros conductores concéntricos con corrientes iguales i opuestas, (b) cálculo de \mathbf{B} para $r < a$

a) Cálculo de \mathbf{B} para $r < a$ (figura 9.18(b))

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i'$$

$$i' = j \pi r^2$$

$$j = \frac{i}{\pi a^2}$$

$$i' = \frac{i \pi}{\pi a^2} r^2 \Rightarrow i' = i \frac{r^2}{a^2}$$

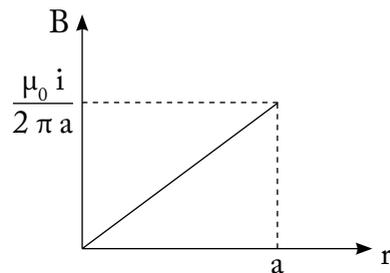


Figura 9.18. c) Gráfico de \mathbf{B} vs. r , para a con la ecuación (9-13)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \frac{r^2}{a^2}$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \cos 0^\circ = \mu_0 i \frac{r^2}{a^2}$$

$$B \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 i \frac{r^2}{a^2}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{r^2}{a^2}$$

$$B = \mu_0 i \frac{r}{2\pi a^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} r \tag{9-13}$$

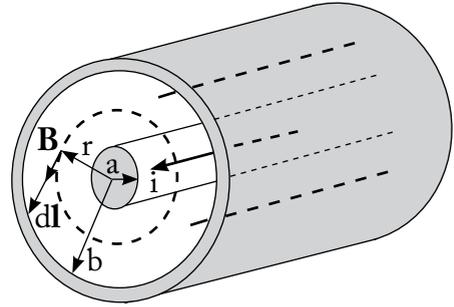


Figura 9.18. (d)

b) Cálculo de B para ($a < r < b$), figura 9.18 (d)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad \rightarrow \quad \int B dl \cos 0^\circ = \mu_0 i \quad \rightarrow \quad B(2\pi r) = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \tag{9-14}$$

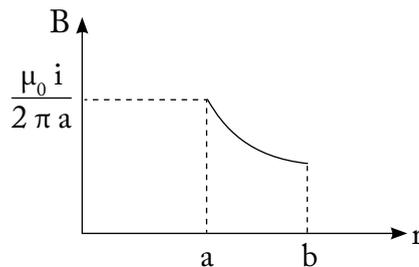


Figura 9.18. (e) Gráfico de \mathbf{B} vs. \mathbf{r} , para $a \leq r \leq b$ con la ecuación (9.14)

c) Cálculo de B para $b < r < c$, figura 9.18 (f)

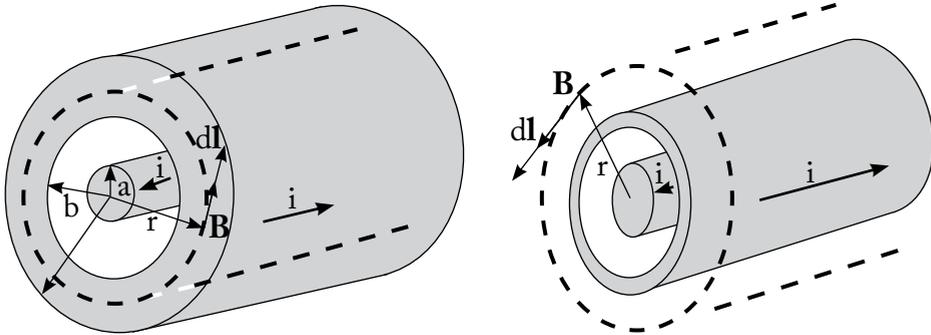


Figura 9.18. (f) B para $b < r < c$, (g) B para $r > c$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i''$$

$$i'' = i - i_1'$$

$$i_1' = j\pi(r^2 - b^2)$$

$$j = \frac{i}{\pi(c^2 - b^2)}$$

$$i_1' = \frac{i}{\pi(c^2 - b^2)} \pi(r^2 - b^2)$$

$$i'' = i \left(\frac{c^2 - b^2 - r^2 + b^2}{c^2 - b^2} \right) = i \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right)$$

$$i'' = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} i$$

$$i_1' = i \frac{(r^2 - b^2)}{c^2 - b^2}$$

$$i'' = i - i \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

$$i'' = i \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int B \, dl \, \cos 0^\circ = \int_0^{2\pi r} B \, dl = B (2\pi r)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i''$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

d) Cálculo de B para $r > c$, figura 9.18 (g)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_{\text{neta}}$$

$$\int_0^{2\pi r} B \, dl \, \cos 0^\circ = \mu_0 (i - i)$$

$$B (2\pi r) = 0$$

$$B = 0$$

Problema 9.3: “Cuatro alambres de cobre están colocados paralelamente entre sí, formando un cuadrado de 20 cm de largo; se hace pasar por cada alambre una corriente de 20 A, en las direcciones mostradas en la figura 9.19 (a). ¿Cuáles son la magnitud y dirección de B en el centro del cuadrado?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1077).

Solución:

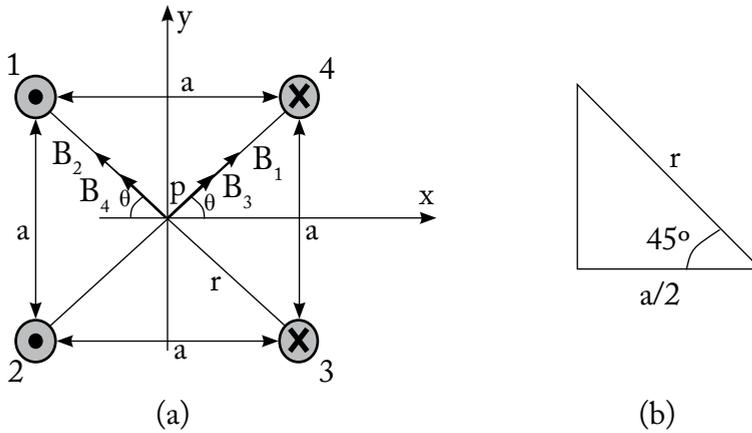


Figura 9.19. (a) Alambres colocados en el vértice de un cuadrado, (b) triángulo de (a)

$$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i = 20 \text{ amp.}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y$$

$$B_x = 0, \text{ por simetría}$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} + B_{3y} + B_{4y}$$

$$B_y = 4B \text{ Sen } \theta$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$B_y = 4B \text{ Sen } 45^\circ$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

En la figura 9.19b $\text{Cos } 45^\circ = \frac{a/2}{r} \rightarrow r = \frac{a}{2 \text{Cos } 45^\circ} = \frac{a}{2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = a \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$r = a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B_y = 4B \text{ Sen } 45^\circ$$

$$B_y = 4 \frac{\mu_o i}{2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} a} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \mu_o i}{a \pi}$$

$$B_y = \frac{2\mu_o i}{\pi a}$$

$$B_r = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{0 + B_y^2} = B_y$$

$$B_r = B_y$$

$$B_y = \frac{2\mu_o i}{\pi a} \hat{j}$$

Problema 9.4: “La figura 9.20(a) muestra un alambre largo que lleva una corriente de 30 Amp. La espira rectangular lleva una corriente de 20 Amp. Calcular la fuerza resultante que obra sobre la espira. Supóngase que $a = 1.0 \text{ cm}$, $b = 8.0 \text{ cm}$ y $l = 30 \text{ cm}$ ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1077).

Solución:

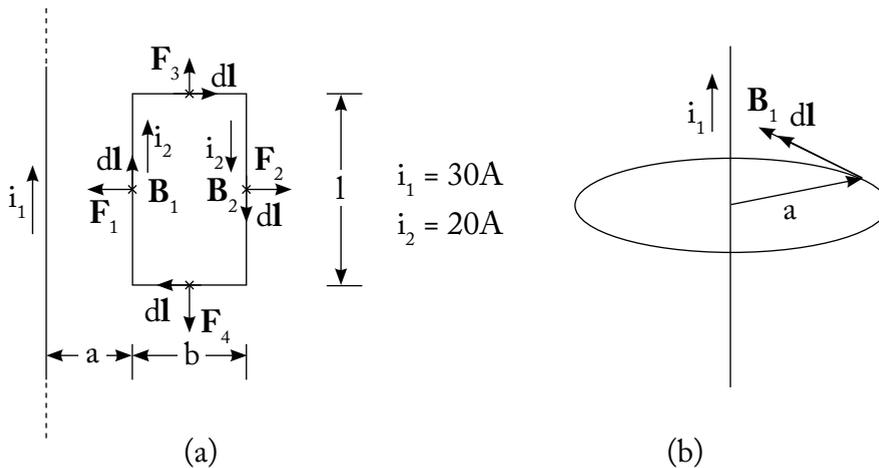


Figura 9.20. (a) Alambre con una corriente i_1 y una espira con i_2 , (b) B_1 generado por i_1

$$\mathbf{F}_1 = i_2 \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1$$

$$F_1 = i_2 \int dl B_1 \sin 90^\circ = B_1 i_2 \int_0^l dl = B_1 i_2 l$$

$$F_1 = B_1 i_2 l$$

Calculo de B_1 utilizando la figura 9.20b, empleamos la regla de la mano derecha donde el dedo pulgar indica la dirección de la corriente y los demás dedos que abrazan al alambre indican la dirección del campo magnético.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \rightarrow \int B_1 dl \cos 0^\circ = \mu_0 i_1$$

$$B_1 \int_0^{2\pi a} dl = \mu_0 i_1$$

$$B_1 (2\pi a) = \mu_0 i_1$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a}, \text{ reemplazando en } F_1 \text{ tenemos:}$$

$$F_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a} i_2 l$$

$$F_1 = \frac{\mu_0 l}{2\pi a} i_1 i_2 \quad (9-15)$$

Procedemos a calcular la fuerza F_2 , figura 9.29 (a):

$$F_2 = i_2 \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_2$$

$$F_2 = i_2 \int dl B_2 \text{ Sen } 90^\circ = i_2 B_2 \int_0^l dl = i_2 B_2 l$$

$$F_2 = i_2 B_2 l$$

Campo magnético B_2 generado por la i_1 en la sección de alambre que se encuentra a una distancia $a + b$:

$$\oint \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_1$$

$$\int B_2 dl \cos 0^\circ = \mu_0 i_1$$

$$B_2 \int_0^{2\pi(a+b)} dl = \mu_0 i_1$$

$$B_2 [2\pi(a+b)] = \mu_0 i_1$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(a+b)}$$

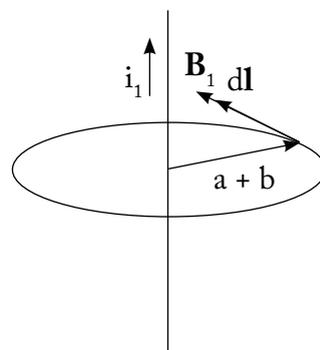


Figura 9.20. (c) B_2 producido por i_1

$$F_2 = i_2 \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(a+b)} l$$

$$F_2 = \frac{\mu_0 l}{2\pi(a+b)} i_1 i_2 \quad (9-16)$$

de (9-15) $F_1 = \frac{\mu_0 l}{2\pi a} i_1 i_2 = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(0.30)}{2\pi (0.01)} (30)(20)$

$$F_1 = 3.6 \times 10^{-3} \text{ N}$$

de (9-16) $F_2 = \frac{\mu_0 l}{2\pi (a+b)} i_1 i_2 = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(0.30)}{2\pi (0.01 + 0.08)} (30)(20)$

$$F_2 = 4 \times 10^{-4} \text{ N}$$

La fuerza total es: $F_T = F_1 - F_2 = 3,6 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-4} = 3,2 \times 10^{-3}$

$$F_T = 3,2 \times 10^{-3} \text{ N}$$

La fuerza $F_3 = F_4$, como tienen direcciones opuestas, se anulan. Cálculo de la fuerza F_3 (figura 9.20(d)).

$$F_3 = i_2 \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$dF_3 = i_2 dl B \cos 90^\circ = i_2 dl B$$

$$dF_3 = i_2 B dl, \text{ integrando}$$

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

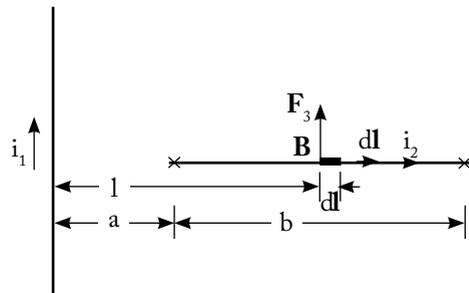


Figura 9.20. (d) Sección de alambre de la espira i_2

$$dF_3 = i_2 \left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi l} \right) dl$$

$$F_3 = \int dF_3 = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \frac{dl}{l}$$

$$F_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \left[\ln l \right]_a^{a+b}$$

$$F_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \ln \frac{a+b}{a}$$

Problema 9.5: demostrar que si se aplica la Ley de Biot-Savart a un conductor largo, se tiene el resultado predicho por Ampere (figura 9.21).

Solución:

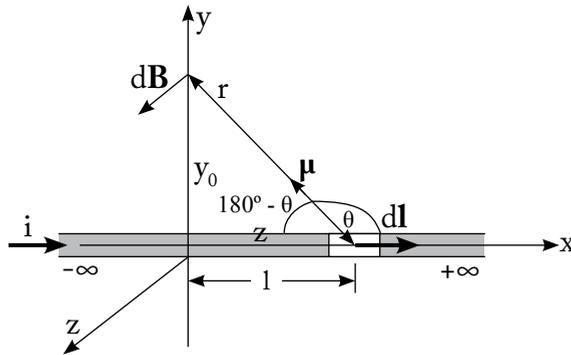


Figura 9.21. Alambre conductor que lleva una corriente i .

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l} \times \boldsymbol{\mu}}{r^2} \quad \text{Ley de Biot-Savart}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \mu \text{Sen } \theta}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \text{Sen } \theta}{r^2}$$

Sen $\theta = \text{Sen}(180^\circ - \theta)$, por ángulos complementarios

$$\text{Sen}(180^\circ - \theta) = \frac{y_0}{r}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \frac{y_0}{r} = \frac{\mu_0 i y_0}{4\pi} \frac{dl}{r^3}$$

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 i y_0}{4\pi} \frac{dl}{r^3}$$

$$r = (y_0^2 + l^2)^{1/2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i y_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(y_0^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i y_0}{4\pi} \left[\frac{1}{y_0^2 (y_0^2 + l^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi y_0} \left[\frac{1}{(y_0^2 + l^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi y_0} (1 + 1) = \frac{\mu_0 i}{4\pi y_0} 2$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi y_0}$$

Problema 9.6: calcular el campo magnético B en el punto P , producido por una espira circular que lleva una corriente i (figura 9.22).

Solución:

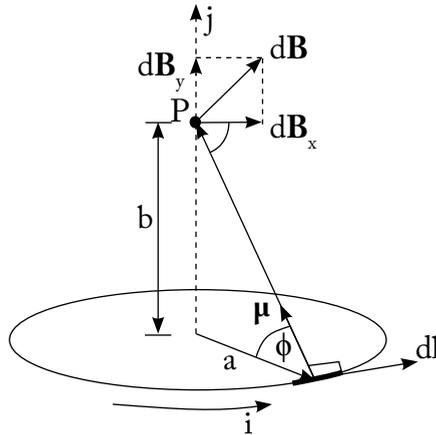


Figura 9.22. Espira circular con una corriente i

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \boldsymbol{\mu}}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \mu \text{ Sen } 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

$$d\mathbf{B}_T = d\mathbf{B}_x + d\mathbf{B}_y \quad \rightarrow \quad d\mathbf{B}_x = 0, \text{ por simetría}$$

$$B_T = \sqrt{B_{Tx}^2 + B_{Ty}^2}$$

$$B_{Ty} = \int dB_y = \int dB \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}$$

$$B_{Ty} = \int dB \frac{a}{r}$$

$$B_{Ty} = \int \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \frac{a}{r} = \int \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \frac{dl}{r^3}$$

Donde, $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$

$$B_{Ty} = \int_0^{2\pi a} \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \frac{dl}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi (a^2 + b^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl$$

$$B_{Ty} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi (a^2 + b^2)^{3/2}} (2\pi a) = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$B_T = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}, \text{ campo magnético en forma escalar}$$

$$\mathbf{B}_T = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{j}}, \text{ campo magnético en forma vectorial}$$

Problema 9.7: “El alambre que se muestra en la figura 9.23(a) lleva una corriente i . ¿Cuál es la inducción magnética en el centro c del semicírculo producida por las siguientes porciones del alambre: a) cada segmento recto de longitud l ; b) el segmento semicircular de radio R ; y c) todo el alambre?” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1078).

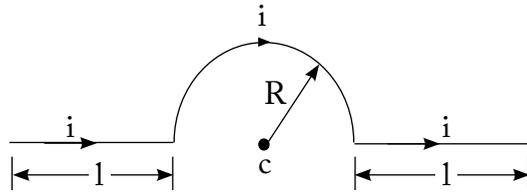


Figura 9.23.(a) Tres secciones de alambres con corriente i

Solución:

Considerando la figura 9.23 (a), procedemos a realizar los cálculos en los tres segmentos de la siguiente forma:

a) Segmento recto del lado izquierdo (figura 9.23(a)), que lo representamos en la figura 9.23(b). En reemplazo del vector unitario μ , ponemos el vector \mathbf{r} y en la ecuación del diferencial del campo magnético dividimos para r^3 .

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl r \text{ Sen } 0^\circ}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{l+R}^R \frac{dl r \text{ Sen } 0^\circ}{r^3}$$

$$d\mathbf{B} = 0$$

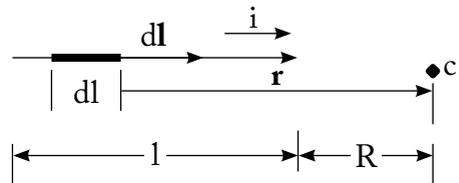


Figura 9.23. (b) Segmento lado izquierdo de (a)

Segmento recto del lado derecho (figura 9.23(a)) que lo representamos en la figura 9.23(c).

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl r \text{ Sen } 180^\circ}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_R^{R+l} \frac{dl r \text{ sen } 180^\circ}{r^3}$$

$$d\mathbf{B} = 0$$

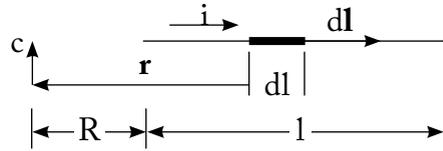


Figura 9.23. (c) Segmento lado derecho de (a)

b) Segmento semicircular de radio R (figura 9.23(a)) que lo representamos en la figura 9.23(d).

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl r \text{ Sen } 90^\circ}{r^3}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{R^2}$$

$$B = \int d\mathbf{B} = \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \int_0^{\pi R} dl$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \pi R = \frac{\mu_0 i}{4R}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4R}$$

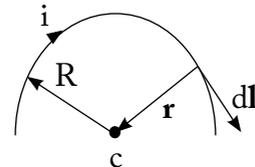


Figura 9.23. (d) Segmento semicircular de (a)

c) Es el mismo valor de b), ya que los tramos rectos no producen ningún valor de inducción.

Problema 9.8: “Un segmento recto de alambre de longitud l lleva una corriente i . Demostrar que el campo de inducción \mathbf{B} producido por este segmento a una distancia R del segmento según la perpendicular bisectriz (figura 9.24), es del siguiente valor:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{l}{(l^2 + 4R^2)^{1/2}}$$

(Resnick y Halliday, 1977, p. 1078).

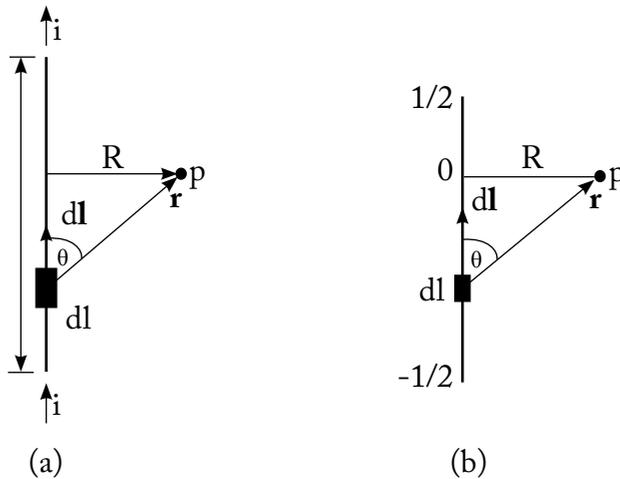


Figura 9.24. (a) Alambre de longitud l , (b) límites del alambre (a)

Tomando en cuenta la figura 9.24, un diferencial de alambre dl produce un diferencial de campo magnético dB en el punto p .

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl r \text{ Sen } \theta}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \text{ Sen } \theta}{r^2}$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{R}{r}$$

$$r = (l^2 + R^2)^{1/2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \frac{dl}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \frac{dl}{(l^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = \int dB = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \frac{dl}{(l^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dl}{(l^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \left[\frac{l}{R^2 (l^2 + R^2)^{1/2}} \right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi R^2} \left[\frac{l/2}{\left(\frac{l^2}{4} + R^2\right)^{1/2}} - \frac{l/2}{\left(\frac{l^2}{4} + R^2\right)^{1/2}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left[\frac{l}{2\left(\frac{l^2 + 4R^2}{4}\right)^{1/2}} + \frac{l}{2\left(\frac{l^2 + 4R^2}{4}\right)^{1/2}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left[\frac{l}{(l^2 + 4R^2)^{1/2}} + \frac{l}{(l^2 + 4R^2)^{1/2}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \left[\frac{l}{(l^2 + 4R^2)^{1/2}} \right] \quad L.Q.Q.D$$

Problema 9.9: Encontrar el valor de \mathbf{B} en el punto p, producido por el alambre de longitudes L y d , el cual lleva una corriente i (figura 9.25) (Resnick y Halliday, 1977, p. 1078).

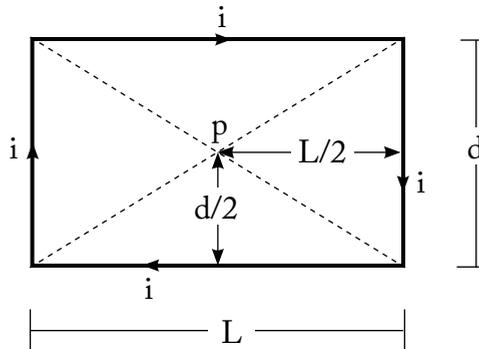


Figura 9.25. Alambre conductor de forma rectangular

La figura 9.25 muestra una situación parecida al problema 9.8; donde la respuesta de B se presenta en la ecuación (9-17):

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{l}{(l^2 + 4R^2)^{1/2}} \quad (9-17)$$

Para el alambre de longitud l , reemplazamos l por L y hacemos:

$$R = \frac{d}{2}$$

Reemplazando en la ecuación (9-17), tenemos:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi \frac{d}{2}} \frac{L}{\left(L^2 + 4\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{\pi d} \frac{L}{(L^2 + d^2)^{1/2}}$$

Como se trata de dos alambres de longitud L, tenemos:

$$B_1 = \frac{2\mu_0 i}{\pi d} \frac{L}{(L^2 + d^2)^{1/2}} \quad (9-18)$$

Para el alambre de longitud d, hacemos $l = d$, y $R = \frac{L}{2}$.

Reemplazando en la fórmula (9-17), tenemos:

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi \frac{L}{2}} \frac{d}{\left(d^2 + 4\frac{L^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{\pi L} \frac{d}{(d^2 + L^2)^{1/2}}$$

Como se trata de dos alambres de longitud d, tenemos:

$$B_2 = \frac{2\mu_0 i}{\pi L} \frac{d}{(d^2 + L^2)^{1/2}} \quad (9-19)$$

El campo magnético B total en el punto p es:

$$B_p = B_1 + B_2$$

$$B_p = \frac{2\mu_0 i}{\pi d} \frac{L}{(L^2 + d^2)^{1/2}} + \frac{2\mu_0 i}{\pi L} \frac{d}{(d^2 + L^2)^{1/2}}$$

$$B_p = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \left[\frac{L}{d(L^2 + d^2)^{1/2}} + \frac{d}{L(d^2 + L^2)^{1/2}} \right]$$

$$B_p = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \left[\frac{L^2 + d^2}{Ld (d^2 + L^2)^{1/2}} \right]$$

$$B_p = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{(d^2 + L^2)^{1/2}}{Ld}$$

Problema 9.10: determinar la incidencia magnética en el interior de un solenoide de longitud finita L (figura 9.26).

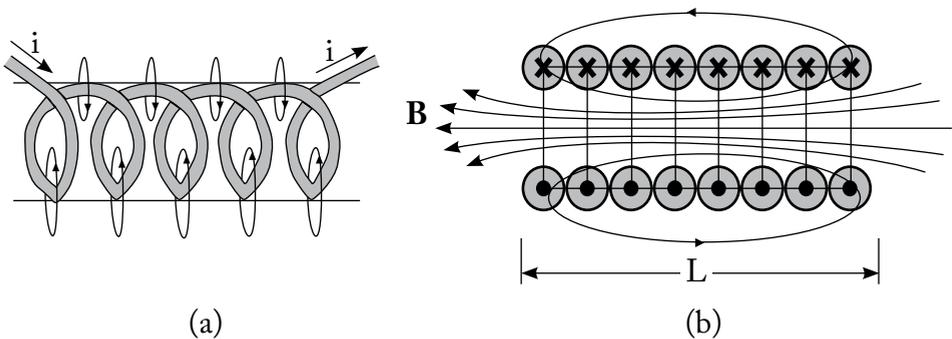


Figura 9.26. (a) Solenoide de longitud L , (b) corte transversal de (a)

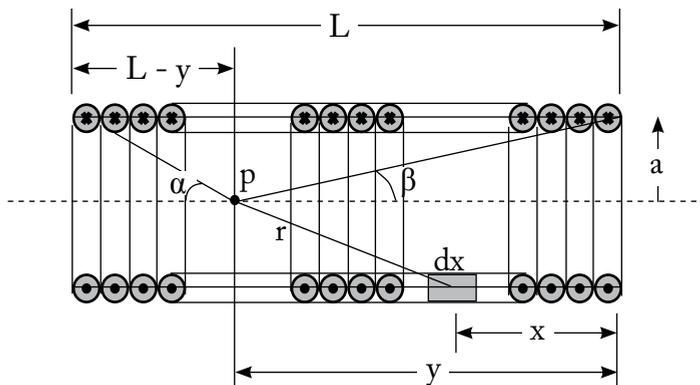


Figura 9.26. (c) Corte transversal del solenoide con $L \gg a$

Queremos calcular el campo magnético \mathbf{B} en el punto p , producido por cada una de las espiras (figura 9.26(c), (d)).

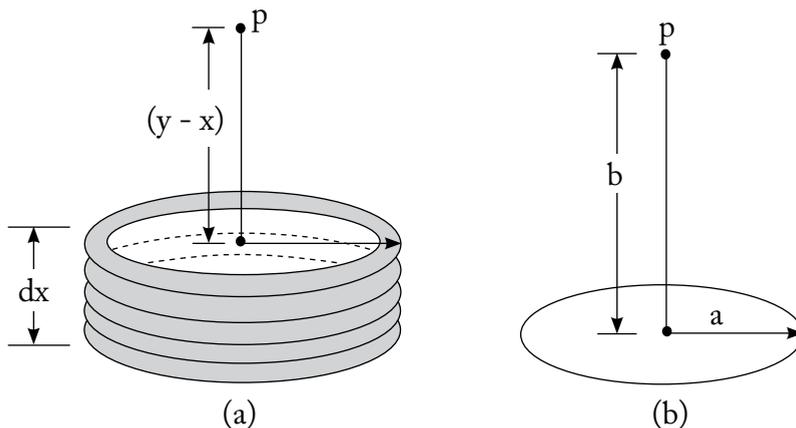


Figura 9.26. (d) Varias espiras, (e) una sola espira de (d)

$$n = \frac{\text{Número de espiras}}{\text{Longitud}}$$

El campo magnético producido por una sola espira (figura 9.26(e)) es:

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

Relacionando esta fórmula para n espiras, hacemos $b = (y - x)$; en un diferencial dx , tenemos n espiras, entonces:

$$dB = \frac{\mu_0 a^2 n i dx}{2 [a^2 + (y - x)^2]^{3/2}}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 a^2 n i}{2} \int \frac{dx}{[a^2 + (y - x)^2]^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 a^2 n i}{2} \int_0^L \frac{dx}{[a^2 + (x - y)^2]^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 a^2 n i}{2} \left[\frac{x - y}{a^2 [a^2 + (x - y)^2]^{1/2}} \right]_0^L$$

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[\frac{L - y}{[a^2 + (L - y)^2]^{1/2}} - \frac{-y}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[\frac{L - y}{[a^2 + (L - y)^2]^{1/2}} + \frac{y}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \right] \quad (9-20)$$

Considerando la figura 9.26(c), sacamos una parte y lo representamos en la figura 9.26(f).

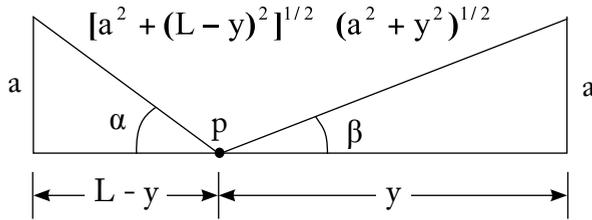


Figura 9.26. (f) Sección de (c)

$$\cos \alpha = \frac{L - y}{[a^2 + (L - y)^2]^{1/2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{[a^2 + y^2]^{1/2}}$$

Reemplazando en la ecuación (9-20), tenemos:

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \alpha + \cos \beta) \quad (9-21)$$

(9-21) es la ecuación para calcular B en cualquier punto en el interior del solenoide.

Si $L \rightarrow \infty$, $\alpha = 0^\circ$ y $\beta = 0^\circ$, nos da como resultado la ecuación (9-22):

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos 0^\circ + \cos 0^\circ) = \frac{\mu_0 n i}{2} (1 + 1)$$

$$B = \mu_0 n i \quad (9-22)$$

Si $L \rightarrow \infty$, calcular el campo magnético B en el extremo del solenoide:

$$\beta = 90^\circ; \alpha = 0^\circ$$

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos 0^\circ + \cos 90^\circ) = \frac{\mu_0 n i}{2} (0 + 1)$$

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2}, \text{ ecuación en los extremos} \quad (9-23)$$

El valor en los extremos (9-23) es la mitad de B en el centro.

Demostración:

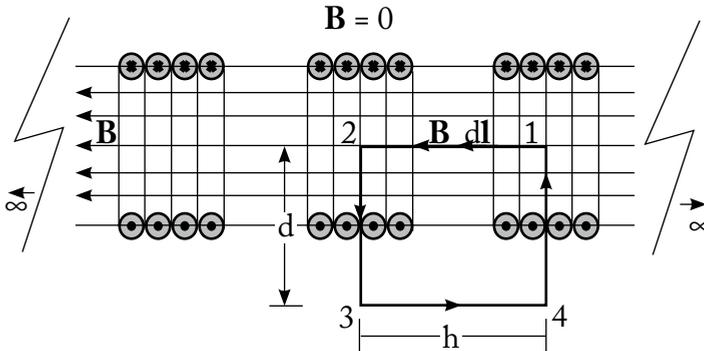


Figura 9.26. (g) Demostración de (9-23)

Utilizando la figura 9.26(g), procedemos a realizar la demostración de la ecuación (9-23) de la siguiente manera:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i'$$

$$i' = n h i, \quad n = \frac{N}{h}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (n h) i \quad (9-24)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 B dl \cos 0^\circ + \int_2^3 B dl \cos 90^\circ + \int_3^4 B dl \cos 180^\circ + \int_4^1 B dl \cos 90^\circ$$

En el tramo de 3 a 4, el campo magnético es igual a cero ($B = 0$).

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 B dl = B \int_0^h dl = Bh$$

en (9-24) $Bh = \mu_0 n h i$

$$B = \mu_0 n i \quad (9-25)$$

La ecuación (9-25) es el mismo resultado por el método anterior; esta es la ecuación (9-22).

CAPÍTULO 10 LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

10.1 Flujo de campo magnético

Según Resnick y Halliday (1977), se define el flujo magnético (ϕ_B) como el número de líneas de campo magnético que atraviesan una superficie (superficie que puede ser cerrada o abierta) en forma perpendicular (p. 1013).

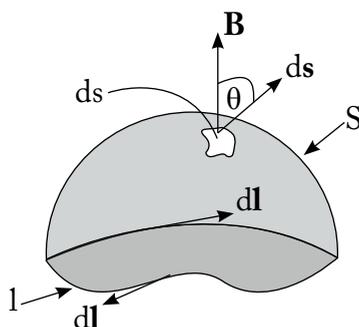


Figura 10.1. Líneas de campo magnético \mathbf{B} , que atraviesa una superficie (cerrada o abierta) en forma perpendicular.

La figura 10.1 muestra una superficie S abierta, donde l es la trayectoria cerrada que limita a S , $d\mathbf{l}$ es un vector diferencial de longitud de la trayectoria y $d\mathbf{s}$ es un vector diferencial de superficie. Sabemos que la superficie no es un vector, pero, si multiplicamos el escalar de superficie ds por el vector normal \mathbf{n} , entonces el diferencial de superficie se convierte en un vector; esto es:

$$d\mathbf{s} = ds \mathbf{n}$$

\mathbf{n} = vector unitario, normal a la superficie

El flujo magnético se define igual como se lo hizo con el flujo eléctrico y se encuentra representado en la ecuación (10-1); esto es:

$$\varphi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (10-1)$$

$$\varphi_B = \int B ds \cos \theta$$

$$\varphi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \text{ para una superficie cerrada}$$

Si la trayectoria l comienza a aumentar, el flujo aumenta y, cuando l tiende a cero (disminuir), el flujo tiende a cero (flujo disminuye).

Convención de signos para ϕ_B : la figura 10.2 muestra las líneas de campo magnético entrando al plano.

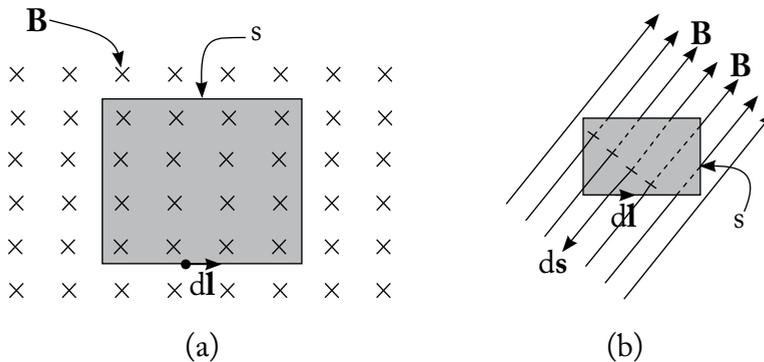


Figura 10.2. Superficie abierta con líneas de campo magnético entrando al plano S, (a) y (b).

El vector superficie es siempre perpendicular de la superficie hacia afuera (figura 10.2(b)). En esta figura, utilizando la ecuación (10-1), calculamos el flujo magnético; esto es:

$$\varphi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int B ds \cos 180^\circ = -B \int ds = -BS$$

$$\varphi_B = -BS$$

Entonces, para un campo \mathbf{B} entrando al plano, ϕ_B será negativo (-). La figura 10.3 muestra las líneas de campo magnético saliendo del plano. Debido a que el vector superficie es de la superficie hacia fuera, el vector campo magnético \mathbf{B} con el vector superficie $d\mathbf{s}$, forman un ángulo de cero grados (0°). Entonces el flujo magnético es:

$$\varphi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\varphi_B = \int B ds \cos 0^\circ = B \int ds = BS$$

$$\varphi_B = BS, \text{ el flujo es positivo (+)}$$

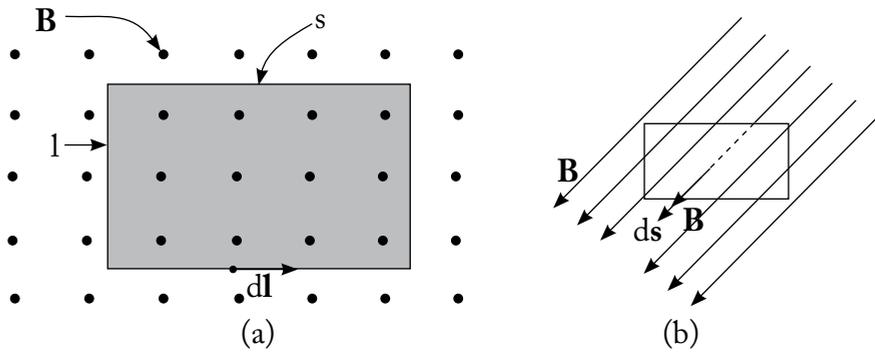


Figura 10.3. Superficie abierta, con líneas de campo magnético saliendo del plano S, (a) y (b).

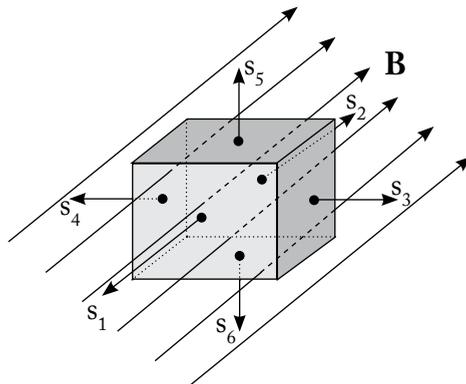


Figura 10.4. Líneas de campo magnético \mathbf{B} , que atraviesan una superficie cerrada.

El flujo ϕ_B en una superficie cerrada siempre es igual a cero (figura 10.4); entonces, con el siguiente procedimiento, demostraremos que $\phi_B = 0$:

$$\varphi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\varphi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_1 + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_2 + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_3 + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_4 + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_5 + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_6$$

$$\varphi_B = \int B ds_1 \cos 180^\circ + \int B ds_2 \cos 0^\circ + \int B ds_3 \cos 90^\circ + \int B ds_4 \cos 90^\circ + \int B ds_5 \cos 90^\circ + \int B ds_6 \cos 90^\circ$$

$$\varphi_B = - \int B ds_1 + \int B ds_2 = -B \int ds_1 + B \int ds_2 = -B s_1 + B s_2$$

$$s_1 = s_2 = s$$

$$\varphi_B = -Bs + Bs = 0$$

$$\varphi_B = 0$$

10.2 Verificación experimental de la Ley de Inducción de Faraday

La figura 10.5 muestra los terminales de una bobina conectada a un galvanómetro. Si introducimos un imán recto en la bobina, con su polo norte dirigiéndose hacia ella (figura 10.5(a)), ocurre una cosa notable: mientras el imán se está moviendo, la aguja del galvanómetro se desvía poniendo de manifiesto que está pasando una corriente por la bobina.

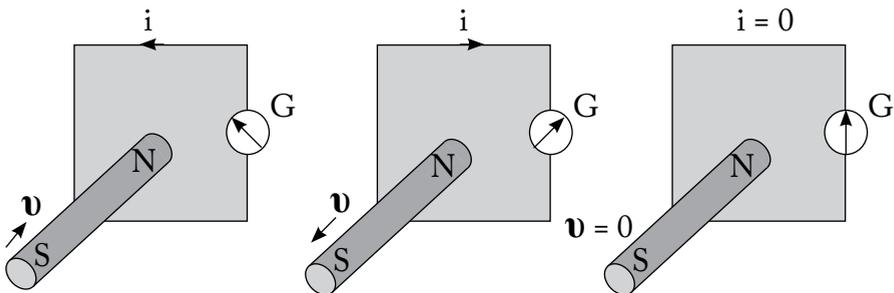


Figura 10.5. (a) Imán entrando a la bobina, (b) el imán se mueve saliendo de la bobina, (c) el imán no se mueve.

Si el imán se mueve alejándose de la bobina (figura 10.5(b)), la aguja del galvanómetro se desvía nuevamente, pero en sentido contrario, lo que quiere decir que la corriente en la bobina está en sentido contrario. Si el imán se sostiene fijo (sin moverse) con respecto a la bobina (figura 10.5 (c)), la aguja del galvanómetro no se desvía.

Si usamos el extremo del polo sur de un imán en lugar del extremo del polo norte, el experimento resulta igual que antes, pero las desviaciones son exactamente al contrario. Otros experimentos muestran que lo que importa es el movimiento relativo del imán y de la bobina. No importa que el imán se mueva hacia la bobina o la bobina hacia el imán, lo único que se requiere es que uno de los dos se mueva o ambos. La corriente que aparece en este experimento se llama *corriente inducida* y se dice que es producida por una *fuerza electromotriz inducida*.

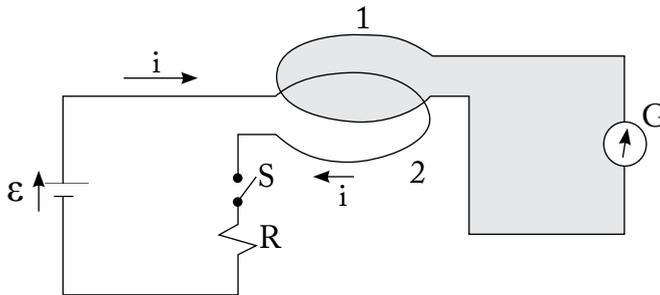


Figura 10.6. El galvanómetro G se desvía momentáneamente cuando el interruptor S se cierra o se abre.

Las bobinas de la figura 10.6 se colocan cercanas, pero en reposo una con respecto a la otra. Cuando se cierra el interruptor S, produciendo así una corriente constante en la bobina 2, la aguja del galvanómetro se desvía momentáneamente; cuando se abre el interruptor, interrumpiendo así esta corriente, la aguja del galvanómetro nuevamente se desvía momentáneamente, pero en sentido contrario.

Los experimentos muestran que habrá una *fem* (fuerza electromotriz) inducida en la bobina 1 de la figura 10.6, siempre que cambie la corriente

en la bobina 2. Lo importante es *la rapidez con la cual cambia la corriente y no la magnitud de la corriente.*

Conclusión:

- a) Un campo eléctrico estará asociado al movimiento de una fuente magnética y no a la presencia de una fuente misma.
- b) El campo eléctrico asociado al movimiento relativo entre una fuente magnética y una espira es función de la variación de flujo magnético a través de ella.

10.3 Cambio de flujo del campo magnético

Podemos variar el flujo magnético ϕ_B a través de dos formas:

- 1) Variando **B**, manteniendo constante **S**
- 2) Variando **S**, manteniendo constante **B**

Primer caso: variando B, manteniendo constante S

- 1-a) Podemos variar el flujo con un imán permanente si mantenemos constante el área S de una espira, alejándose o acercándose al imán (figura 10.7), con la finalidad de variar B.

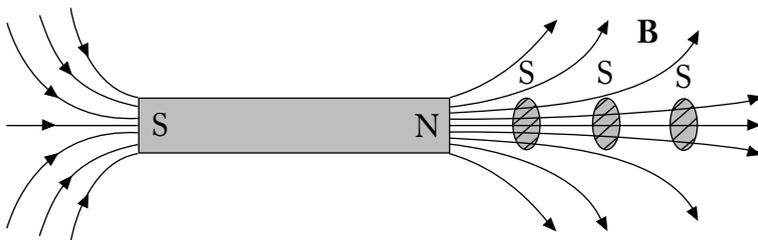


Figura 10.7. La espira de área S se aleja y se acerca al polo norte del imán.

1-b) Podemos variar el flujo con un solenoide, si variamos \mathbf{B} mediante la variación de la corriente i , que entra al solenoide (figura 10.8), utilizando la fórmula $B = \mu_0 ni$. Con una corriente i_1 en el solenoide, tenemos un flujo ϕ_{B1} :

$$\phi_{B1} = B_1 S = \mu_0 ni_1 S, \quad n = N/L$$

Con una corriente i_2 en el solenoide, tenemos un flujo ϕ_{B2} :

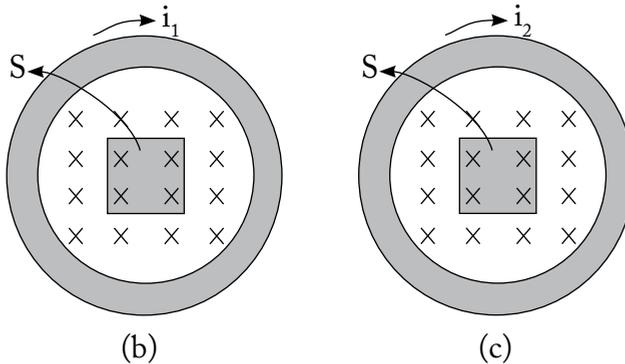
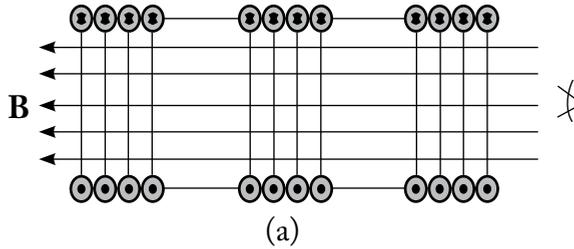


Figura 10.8. Variación de flujo, manteniendo constante el área S y variando el campo magnético B . (a) Solenoide, (b) corte transversal del solenoide con i_1 y una superficie constante S , (c) corte transversal del solenoide con i_2 y una superficie constante S .

Segundo caso: variando S , manteniendo constante B .

2-a) Podemos variar el flujo, manteniendo constante el campo magnético B y variando el área. Esto lo podemos observar en la figura 10.9.

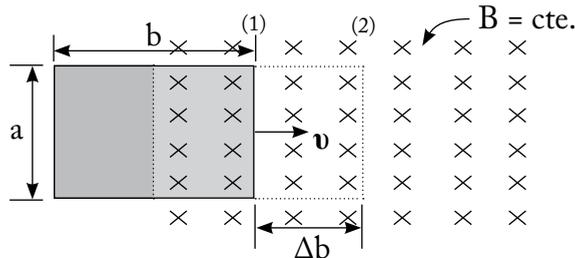


Figura 10.9. Cambio del flujo, manteniendo constante B y variando el área S de la espira.

Si la espira que describe un área ab , la movemos con una velocidad hacia el campo magnético constante B , a medida que la espira entra al campo magnético, el área de la espira que atraviesa el campo magnético va aumentando; por lo tanto, el área varía. Entonces, se produce una variación del flujo; esto es:

$$\Delta\phi_B = B \Delta b a$$

2-b) Podemos variar el flujo manteniendo constante el campo magnético B y moviendo el área de la espira mediante la rotación de la misma (figura 10.10). Bajo este efecto, se está variando el área de la espira.

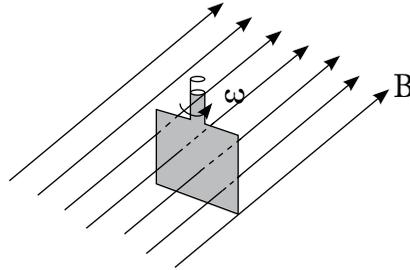


Figura 10.10. Espira rotando en un campo magnético \mathbf{B} constante.

10.4 Fuerza electromotriz debida al movimiento

En la figura 10.11, la espira que describe un área ab se desplaza a lo largo del plano xy que se encuentra dentro de un campo magnético. Dicho campo se incrementa en la dirección de x^+ . El campo magnético \mathbf{B} está entrando en forma perpendicular al plano xy y el vector superficie sale en forma perpendicular del plano citado.

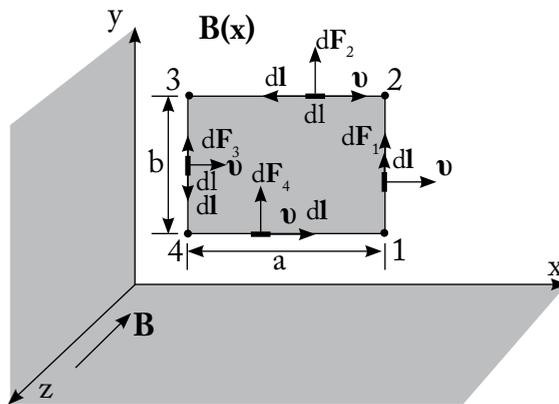


Figura 10.11. La espira que describe un área ab , se desplaza hacia la derecha, con una velocidad \mathbf{v} en un campo \mathbf{B} .

La espira se desplaza a la derecha con una velocidad \mathbf{v} . Aplicando la fórmula $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, podemos hallar la dirección de las fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 y \mathbf{F}_4 (figura 10.11). El trabajo (W) es necesario para mover una carga q a través de la espira, empezando desde el punto 1 y siguiendo por los puntos 2, 3, 4 hasta llegar al punto inicial 1. Se utiliza la siguiente fórmula:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{F}_4 \cdot d\mathbf{l}$$

$$W = \int_1^2 F_1 dl \cos 0^\circ + \int_2^3 F_2 dl \cos 90^\circ + \int_3^4 F_3 dl \cos 180^\circ + \int_4^1 F_4 dl \cos 90^\circ$$

$$W = \int_1^2 F_1 dl - \int_3^4 F_3 dl = F_1 b - F_3 b$$

$$W = b (F_1 - F_3) \quad (10-2)$$

Para calcular las magnitudes de las fuerzas F_1 y F_3 , procedemos de la forma siguiente:

$$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1$$

$$F_1 = qvB_1 \sin 90^\circ = qvB_1$$

$$F_3 = qvB_3 \sin 90^\circ = qvB_3$$

Reemplazando estos valores de F_1 y F_3 en la ecuación (10-2), tenemos:

$$W = b (qvB_1 - qvB_3)$$

$$W = bqv (B_1 - B_3) \quad (10-3)$$

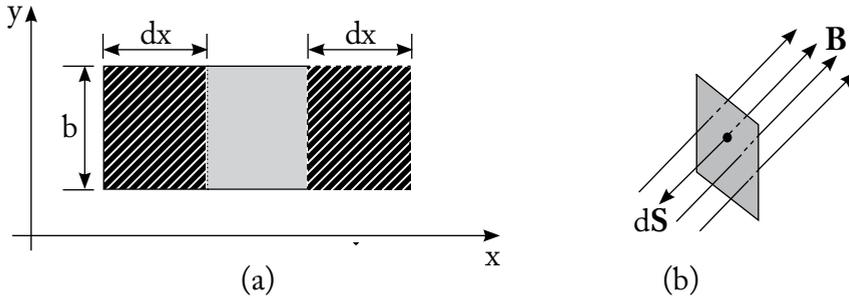


Figura 10.12. De la figura 10.11, (a) espira desplazándose hacia la derecha en el plano xy a una distancia dx , (b) el campo B y la superficie S son vectores perpendiculares al plano xy .

Cuando la espira se ha desplazado una distancia dx , la velocidad es:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Reemplazando en la ecuación (10-3), tenemos:

$$W = bq \frac{dx}{dt} (B_1 - B_3)$$

$$\frac{W}{q} dt = B_1 b dx - B_3 b dx$$

Donde, $d\varphi_{B_1} = B_1 b dx$
 $d\varphi_{B_3} = B_3 b dx$

$$\frac{W}{q} dt = d\varphi_{B_1} - d\varphi_{B_3} = d\varphi_B \rightarrow \frac{W}{q} dt = d\varphi_B \quad (10-4)$$

$B_1 > B_3$, debido a que el campo magnético se incrementa en la dirección positiva del eje x (figura 10.11). En la figura 10.12, calculamos el diferencial de flujo magnético utilizando la fórmula siguiente:

$$d\phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$d\phi_B = B dS \cos = -B dS = -B b dx$, reemplazando en la ecuación (10-4), tenemos la ecuación (10-5); esto es:

$$\frac{W}{q} dt = -d\varphi_B \quad (10-5)$$

$$\text{Donde, } \frac{W}{q} = \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} dt = -d\varphi_B$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi_B}{dt} \quad (10-6)$$

La ecuación (10-6) representa la fuerza electromotriz inducida (fem). Si R es la resistencia equivalente del circuito, entonces i es la corriente inducida.

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R} \left(-\frac{d\varphi_B}{dt} \right)$$

$$i = -\frac{1}{R} \left(\frac{d\varphi_B}{dt} \right)$$

10.5 Ley de Inducción de Faraday

La Ley de Inducción de Faraday dice que: la fuerza electromotriz inducida en un alambre conductor es igual al valor negativo de la rapidez con la cual está cambiando el flujo magnético que atraviesa el área que describe el alambre (figura 10.13).



Figura 10.13. Movimiento de un electrón que realiza un trabajo al moverse por un alambre conductor.

En la figura 10.13, se muestra la fuerza que produce un electrón; debido a esta fuerza, se genera un movimiento que, a su vez, realiza un trabajo. Dicho trabajo viene dado por:

$$W = \int \mathbf{F}e \cdot d\mathbf{l} = \int q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\frac{W}{q} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

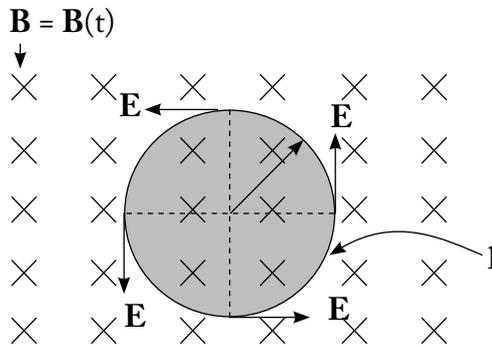


Figura 10.14. fem inducida en la espira

En la figura 10.14, existe un campo eléctrico \mathbf{E} en la espira circular de longitud $l = 2\pi R$, siempre y cuando esté cambiando el campo magnético \mathbf{B} ; entonces, la fem inducida en el alambre circular es la integral cerrada de longitud, la misma que viene expresada en la ecuación (10-7), la cual representa la Ley de Inducción de Faraday.

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{Ley de Inducción de Faraday} \quad (10-7)$$

Características de \mathcal{E} :

- a) \mathcal{E} aparece solo cuando el flujo magnético cambia.
- b) Solamente importa el movimiento relativo.
- c) Se aplica a cualquier región del espacio independiente de la presencia de un conductor.
- d) El signo negativo indica que la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} , se opone al cambio de flujo magnético ϕ_B .

Características de \mathbf{E} :

- a) No se origina debido a cargas electrostáticas. Se origina debido al flujo magnético variable.
- b) Las líneas de campo eléctrico inducido son líneas cerradas. Las líneas de campo electrostático salen de la carga positiva y terminan en una carga negativa.
- c) La integral de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, para una trayectoria cerrada (campo conservativo)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{para una trayectoria cerrada (campo no con-$$

servativo). a

- d) $V_a - V_b = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ es aplicable solo a sistemas conservativos.

10.6 Ley de Lenz

“La corriente inducida aparece en un sentido tal que se opone a la causa que la produce”. El signo menos en la ley de Faraday sugiere esta oposición. Oponerse a la causa que la produce significa que: si el flujo magnético que atraviesa el interior de una espira está aumentando (figura 10.15), entonces la corriente inducida crea un flujo en dirección contraria para que se oponga a este aumento. Si el flujo magnético que atraviesa el interior de una espira está disminuyendo (figura 10.16), entonces la corriente inducida crea un flujo en la misma dirección para que se oponga a esta disminución.

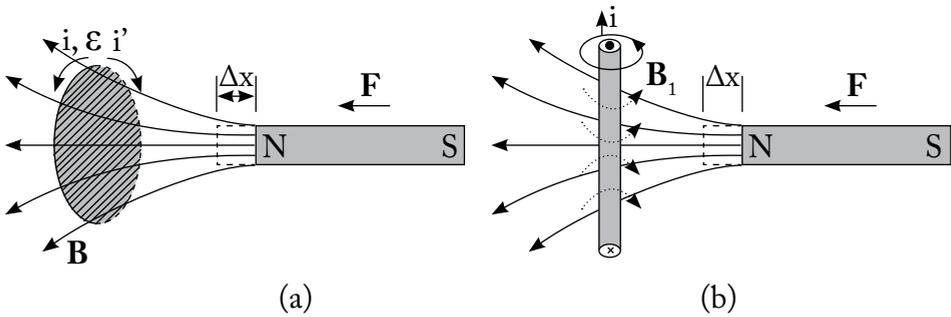


Figura 10.15. (a) Imán acercándose a la espira, la corriente inducida i y se oponen al cambio del flujo (aumenta ϕ_B). (b) Vista frontal de la espira con el imán (a) acercándose. B_1 son las líneas de campo magnético producida por la corriente inducida i .

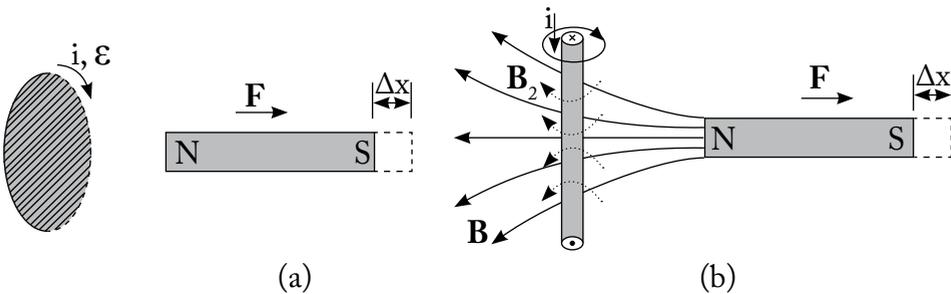


Figura 10.16. (a) Imán alejándose a la espira; la corriente inducida i y se oponen al cambio del flujo (disminuye ϕ_B). (b) Vista frontal de la espira con el imán (a) alejándose. B_1 son las líneas de campo magnético producida por la corriente inducida i .

En la figura 10.15, el imán se acerca a la bobina. Utilizando la regla de la mano derecha, la corriente en la espira debería ser la dirección que lleva a i' , pero se debe aplicar la ley de Lenz, que dice que la corriente inducida debe oponerse al cambio. Entonces, la corriente debe llevar la dirección de i y esta produce un campo magnético \mathbf{B}_1 .

En la figura 10.16, el imán se está alejando. Entonces, la dirección de la corriente inducida debe oponerse a este cambio. Si el imán se aleja, el flujo disminuye; para oponerse a esta disminución, las líneas de campo magnético deben estar en la misma dirección para aumentar el flujo. La corriente inducida i produce un campo magnético \mathbf{B}_2 .

10.7 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 10)

Problema 10.1: “Conservación de la energía en un generador elemental”. La figura 10.17 muestra una varilla de longitud l , que puede deslizarse sobre un riel formando una espira situada en un campo uniforme \mathbf{B} . Si se empuja la varilla como se indica, con una velocidad constante v , este movimiento dará lugar a una variación del flujo magnético (ϕ_B) que atraviesa la espira y a la generación de una fuerza electromotriz \mathcal{E} (fem).

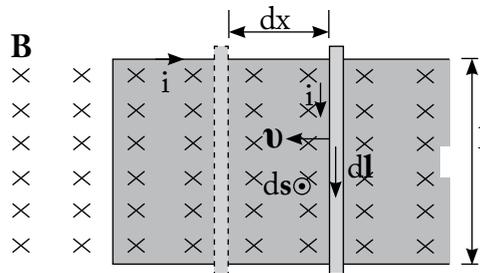


Figura 10.17. Alambre sobre un riel desplazándose hacia la izquierda.

Solución:

En la figura 10.17, el alambre de longitud l se está desplazando a la izquierda sobre un riel; las líneas de campo magnético B atraviesan en forma perpendicular al riel. Si el alambre avanza un diferencial de distancia dx , entonces, el diferencial de flujo en este diferencial de área ($l dx$) es:

$$d\varphi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$d\varphi_B = B dS \cos 180^\circ = -B dS = -B l dx$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\varphi_B}{dt} = - \frac{d}{dt}(-B l dx) = \frac{d}{dt}(B l dx) = Bl \frac{dx}{dt} = Bl v$$

$$\mathcal{E} = Bl v$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bl v}{R}, \text{ donde } R = \text{resistencia del circuito}$$

$$P = \mathcal{E} i$$

$$P = Bl v \frac{Bl v}{R} = \frac{(Bl v)^2}{R}$$

$$\frac{dW}{dt} = F v$$

$$F = i l B$$

$$\frac{dW}{dt} = i l B v = \left(\frac{Bl v}{R} l B v \right) = \frac{(Bl v)^2}{R}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{(Bl v)^2}{R}, \text{ rapidez con que la fuerza externa hace trabajo para mover la espira.}$$

Problema 10.2: una espira, de las dimensiones mostradas en la figura 10.18, se mueve alejándose con una velocidad \mathbf{v} , del conductor rectilíneo indefinido que lleva una corriente constante i ; ambos se mantienen en un mismo plano. Calcular la fuerza electromotriz inducida en el marco.

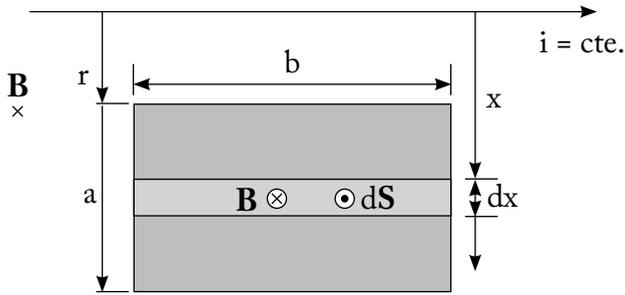


Figura 10.18. Espira desplazándose hacia abajo.

Solución:

El conductor rectilíneo lleva una corriente constante i hacia la derecha. Aplicando la regla de la mano derecha, el campo magnético \mathbf{B} entra perpendicularmente al plano. La espira describe un área ab , y se desplaza hacia abajo; razón por la cual hace que el flujo magnético sea variable. Para calcular el flujo magnético, consideramos un diferencial de área ($dS = bdx$), sobre el cual dibujamos los vectores \mathbf{B} y $d\mathbf{S}$, tal como se muestra en la figura 10.18. Utilizando la fórmula de flujo, tenemos:

$$d\varphi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$d\varphi_B = B \, dS \, \cos 180^\circ = -B \, dS = -B b dx$$

$$d\varphi_B = -B b dx \tag{10-8}$$

Para calcular el campo magnético a una distancia x , producido por el alambre que lleva la corriente constante i , utilizamos la ley de Ampere:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_n$$

$$\int B dl \cos 0^\circ = \mu_0 i$$

$$B (2\pi x) = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \tag{10-9}$$

Reemplazando (10-9) en (10-8), e integrando tenemos:

$$d\varphi_B = -\frac{\mu_0 i}{2\pi x} b dx$$

$$\varphi_B = -\int_r^{r+a} \frac{\mu_0 i b}{2\pi x} dx = -\frac{\mu_0 i b}{2\pi} \int_r^{r+a} \frac{dx}{x} = -\frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r}$$

La fuerza electromotriz inducida viene dada por:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(-\frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r} \right)$$

Si multiplicamos y dividimos por dr , la ecuación no se altera; entonces, tenemos:

$$\mathcal{E} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r} \right) \right) \frac{dr}{dr} = \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r} \right) \right) \frac{dr}{dt}, \text{ pero } \frac{dr}{dt} = v$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 i b v}{2\pi} \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{r+a}{r} \right) = \frac{\mu_0 i b v}{2\pi} \frac{r}{r+a} \frac{d}{dr} \left(\frac{r+a}{r} \right) = \frac{\mu_0 i b v}{2\pi} \frac{r}{r+a} \left(-\frac{a}{r^2} \right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 i b v}{2\pi} \frac{a}{r(r+a)}$$

Problema 10.3: igual al enunciado del problema 2, con la diferencia que la corriente i en este caso es sinusoidal, es decir, variable en el tiempo (figura 10.19).

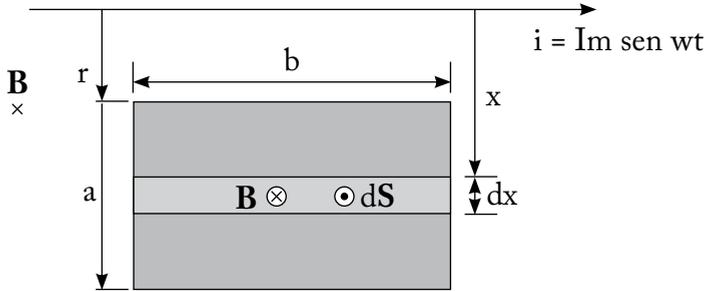


Figura 10.19. Espira sin movimiento, pero la corriente i variable

Solución:

El flujo magnético se calcula siguiendo el mismo procedimiento que en el problema 10.2; esto es:

$$\varphi_B = - \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r}$$

$$\varphi_B = - \frac{\mu_0 b I_m \text{Sen } wt}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r}$$

La fuerza electromotriz inducida viene dada por:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\varphi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(- \frac{\mu_0 b I_m \text{Sen } wt}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 b I_m \text{Sen } wt}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r} \right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 b I_m}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r} \frac{d}{dt} (\text{Sen } wt)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 b I_m}{2\pi} \left(\ln \frac{r+a}{r} \right) w \text{Cos } wt$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 b \omega I_m}{2\pi} \left(\ln \frac{r+a}{r} \right) \text{Cos } \omega t$$

Problema 10.4: igual al enunciado del problema 3, con la diferencia de que la espira es abierta, como la que se muestra en la figura 10.20. Calcular la fem inducida y poner los signos en los extremos de la espira y la dirección de la corriente inducida i_{ind} . Realizar el análisis en el primer semiciclo positivo, primer cuadrante de la función $i = I_m \text{Sen } \omega t$.

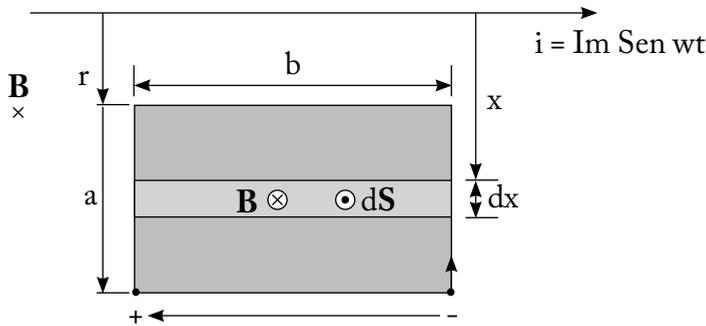


Figura 10.20. Espira abierta

Solución:

El flujo magnético y la fuerza electromotriz inducida se calculan siguiendo el mismo procedimiento que en el problema 10.3, cuyos resultados son:

$$\varphi_B = - \frac{\mu_0 b I_m \text{Sen } \omega t}{2\pi} \ln \frac{r+a}{r}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 b \omega I_m}{2\pi} \left(\ln \frac{r+a}{r} \right) \text{Cos } \omega t$$

Para poner la dirección de la corriente i_{ind} , aplicamos la ley de Lenz. Como nos piden analizar en el primer semiciclo positivo, primer cuadrante de la función $i = I_m \text{ Sen } \omega t$, vemos que la corriente está aumentando, razón por la cual el campo magnético B también está aumentando. Lenz dice que se debe oponer al cambio; entonces, la corriente inducida i_{ind} debe generar un campo magnético en dirección opuesta para que disminuya el campo resultante. En la figura 10.20, aplicamos la regla de la mano derecha; el campo magnético generado por la corriente inducida tiene que salir perpendicularmente al plano del papel, y la corriente inducida apunta en la dirección del dedo pulgar. Para poner los signos de la fem = \mathcal{E} , aplicamos el criterio de que, en una fuente, la corriente va de negativo (-) a positivo (+).

Problema 10.5: “La figura 10.21 muestra una barra de cobre que se mueve con una velocidad v , paralelamente a un alambre recto largo, que lleva una corriente i . Calcúlese la fem inducida en la barra, suponiendo que $v = 5.0 \text{ m/seg}$, $i = 100 \text{ Amp}$, $a = 1.0 \text{ cm}$ y $b = 20 \text{ cm}$ ” (Resnick y Halliday, 1977, p. 1113).

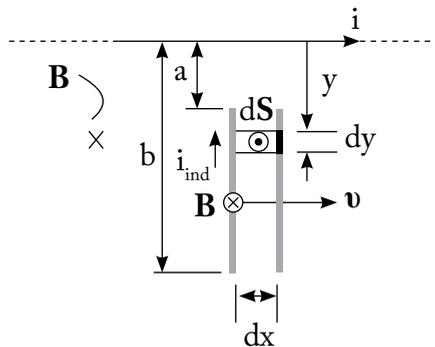


Figura 10.21. Alambre conductor desplazándose a la derecha dentro de un campo magnético externo B .

Solución:

Para encontrar la dirección de la corriente inducida, podemos utilizar el producto cruz entre los vectores campo magnético y velocidad; esto es, $v \times B$, la dirección de este vector nos da la dirección de la corriente inducida i_{ind} . En la figura 10.21, vemos que esta corriente es hacia arriba. Además, la flecha del producto cruz nos da el signo positivo del voltaje inducido. Procedemos a calcular el flujo magnético y la *fem* inducida de la siguiente forma:

$$d\varphi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$d\varphi_B = B \, dS \, \cos 180^\circ = -B \, dS = -B \, dx \, dy$$

$$d\varphi_B = -B \, dx \, dy$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_n$$

$$\int B \, dl \, \cos 0^\circ = \mu_0 i$$

$$B (2\pi y) = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}$$

$$d\varphi_B = -\frac{\mu_0 i}{2\pi y} \, dx \, dy$$

$$\varphi_B = -\int_a^b \frac{\mu_0 i \, dx}{2\pi} \frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 i \, dx}{2\pi} \int_a^b \frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 i \, dx}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

La fuerza electromotriz inducida viene dada por:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(-\frac{\mu_0 i \, dx}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 i \, dx}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) = \frac{dx}{dt} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\mathcal{E} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(100)(5.0)}{2\pi} \ln \frac{0.2}{0.01} = 2.996 \text{ voltios}$$

$$\mathcal{E} = 3.0 \text{ voltios}$$

Problema 10.6: “Un campo magnético uniforme de inducción B llena un volumen cilíndrico de radio R . Una barra metálica de longitud l se coloca como muestra la figura 10.22(a). Si B está cambiando con una rapidez dB/dt , demuestre que la *fem* que se produce por el campo magnético cambiante y que obra entre los extremos de la varilla está dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{E} = \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} ”$$

(Resnick y Halliday, 1977, p. 1115).

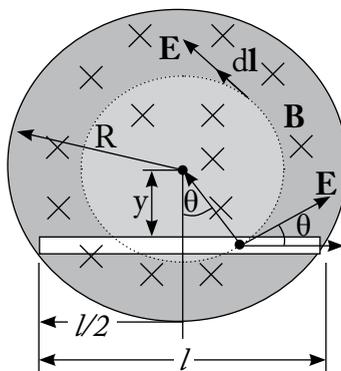


Figura 10.22. (a) Alambre dentro de una esfera en un B externo

Solución:

Utilizando la fórmula de la ley de inducción de Faraday, tenemos:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\varphi_B}{dt}$$

De la figura 10.22 (a), sacamos el círculo de radio r y lo mostramos en la figura 10.22 (b). Procedemos a calcular el campo eléctrico E .

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\varphi_B}{dt}$$

$$\int_0^{2\pi r} E dl \cos 0^\circ = - \frac{d}{dt}(BA)$$

$$E (2\pi r) = - \frac{d}{dt}(B \pi r^2)$$

$$E (2\pi r) = - \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

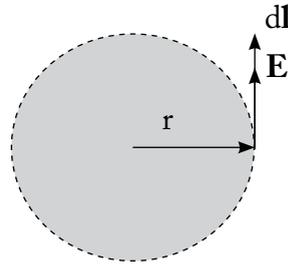


Figura 10.22. (b) Círculo de radio r

Cálculo de \mathcal{E} en la barra metálica (figura 10.22 (c))

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int E dl \cos \theta$$

$$\mathcal{E} = \int E dl \cos \theta \tag{10-10}$$

En la figura 10.22 (d), tenemos:

$$\cos \theta = \frac{y}{r}, \quad R^2 = y^2 + (l/2)^2 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{R^2 - (l/2)^2}$$

Reemplazando en la ecuación (10-10), tenemos:

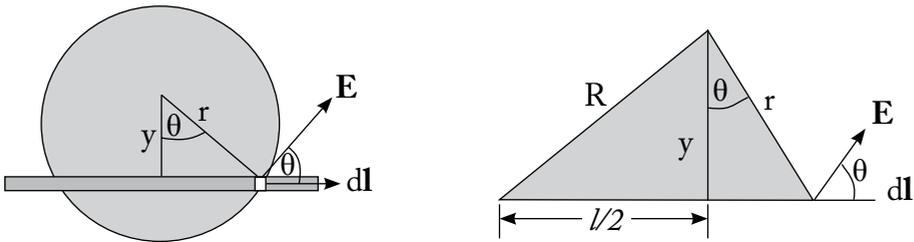


Figura 10.22. (c) Círculo de radio r con la barra, (d) triángulo de (c)

$$\mathcal{E} = \int \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} dl \frac{y}{r}$$

$$\mathcal{E} = \int_0^l \frac{y}{2} \frac{dB}{dt} dl = \frac{y}{2} \frac{dB}{dt} \int_0^l dl = \frac{y}{2} \frac{dB}{dt} l = \frac{l}{2} \frac{dB}{dt} y = \frac{l}{2} \frac{dB}{dt} \sqrt{R^2 - (l/2)^2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{l}{2} \frac{dB}{dt} \sqrt{R^2 - (l/2)^2} \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Problema 10.7: generadores de corriente alterna (figura 10.23 (a)).

Solución:

En la figura 10.23(a), se muestra una espira rectangular que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, alrededor del eje z , y se encuentra dentro de un campo magnético constante B ; en los dos extremos de la espira, se encuentra conectado un bombillo, el cual se prende (funciona)

cuando se induce una fuerza electromotriz. Debido al movimiento circular de la espira, esta varía su área, razón por la cual se produce un flujo variante en el tiempo; entonces, como consecuencia de esto, se genera una fuerza electromotriz \mathcal{E} en los puntos (extremos de la espira) que está conectado el bombillo. Para calcular el flujo magnético, procedemos de la siguiente forma:

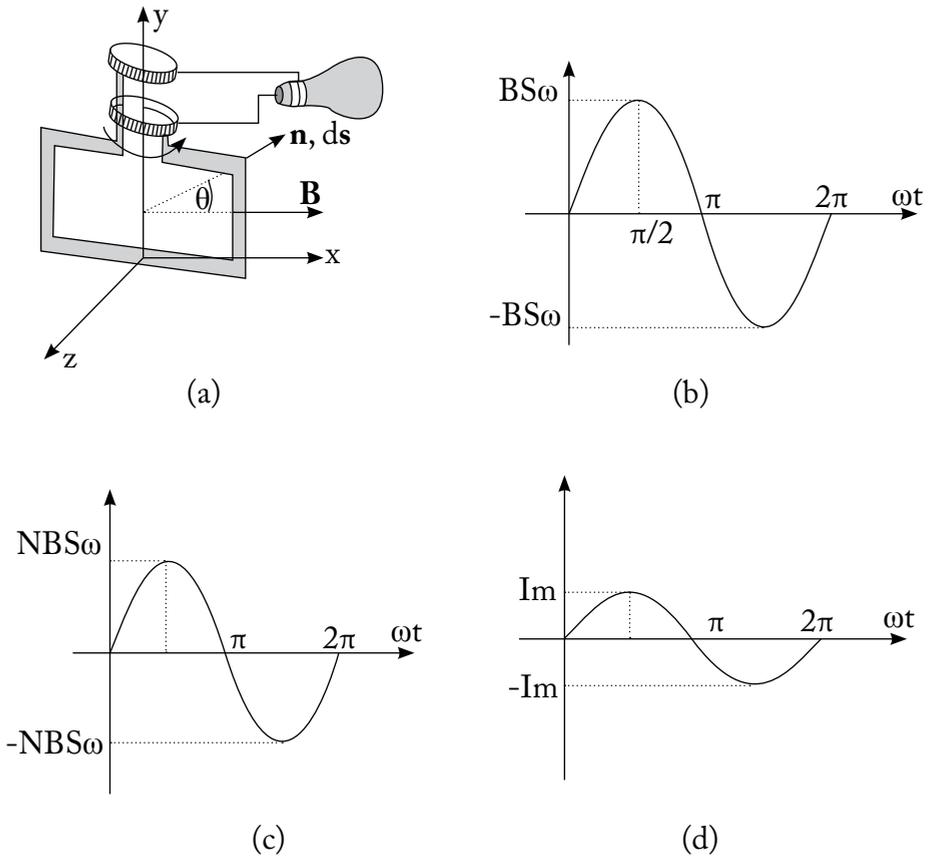


Figura 10.23. (a) Espira girando en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje z, (b) generación de la onda sinusoidal de la espira (a), (c) gráfica de la onda de voltaje para N espiras, (d) gráfica de la onda de corriente.

$$\varphi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\varphi_B = \int B ds \cos \theta = B \cos \theta \int ds = B S \cos \theta$$

$$\varphi_B = B S \cos \theta, \text{ donde, } S = \text{área}; \quad \theta = \omega t$$

$$\varphi_B = B S \cos \omega t$$

Con este flujo magnético φ_B , calculamos la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} , utilizando la siguiente fórmula:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\varphi_B}{dt}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt}(B S \cos \omega t) = - B S \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = - B S (-\omega \sin \omega t) = B S \omega \sin \omega t$$

$$\mathcal{E} = B S \omega (\sin \omega t) \quad (\text{para una sola espira}) \quad (10-11)$$

La fuerza electromotriz \mathcal{E} cambia de sentido cada 180° que ha rotado. Cuando rota 90° , el flujo se hace cero; como puede verse en la figura 10.23 (b), que es una gráfica de la ecuación (10-11).

Para calcular la fuerza electromotriz para varias espiras, únicamente multiplicamos por N a la ecuación (10-11) y como resultado tenemos la ecuación (10-12).

$$\mathcal{E} = N B S \omega (\sin \omega t) \quad (\text{para } N \text{ espiras}) \quad (10-12)$$

La figura 10.23(c) es la representación gráfica de la ecuación (10-12). Si R es la resistencia del circuito, procedemos a calcular la corriente, de la siguiente manera:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NBSw \text{ Sen } wt}{R} = \frac{NBSw}{R} \text{ Sen } wt$$

$$i = I_m \text{ Sen } wt \quad (10-13)$$

Donde I_m es la corriente máxima que es igual a:

$$I_m = \frac{NBSw}{R}$$

De tal forma que, la onda de corriente es la de la ecuación (10-13) y su gráfica se muestra en la figura 10.23 (d).

REFERENCIAS

- Resnick, R. y Halliday, D. (1977). *Física parte 2*. (2ª. ed.). México: CECSA.
- Resnick, R., Halliday, D, y Krane, K. S. (2006). *Física volumen 2*. (5ª. ed.). México: CECSA.
- Hayt, W., Kemmerly, J. y Durbin, S. (2012). *Análisis de circuitos en ingeniería*. México: Mc Graw-Hill.
- Salas, S. L. y Hille, E. (1976). *CALCULUS de una y varias variables con geometría analítica*. España: Reverté.
- Sears, F. W. y Zemansky, M. W. (1966). *Física*. Madrid: Aguilar.
- Sears, F. W. Zemansky, M. W. *et al.* (2004). *Física Universitaria 2*. (11ª. ed.). México: Pearson Educación.
- Bueche, F. J. y Hecht, E. (2007). *Física General*. (10ª. ed.). México: Mc Graw-Hill.

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos se publica con el único propósito de ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de los campos electromagnéticos y circuitos eléctricos.

La obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral, y de álgebra vectorial. La parte teórica presenta los principales aspectos en los que se basa el electromagnetismo, para luego poder aplicarlos en el desarrollo de problemas, siendo así una herramienta de trabajo de fácil entendimiento para el estudiante.

A lo largo de todo el libro, se concede atención a las leyes de: Coulomb, Gauss, Ohm, Kirchhoff, Ampere, Biot-Savart y Lenz. Estas leyes son fundamentales para el aprendizaje, de tal forma que se las puede emplear en el estudio de los circuitos eléctricos y magnéticos.

Pedro Infante Moreira nació en Quinsaloma, provincia de Los Ríos, en 1959. Es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Maestrías en Gestión Académica Universitaria y Administración de Empresas. Actualmente es candidato a un Doctorado en Ciencias Técnicas. Tiene 22 años en la docencia, en la Universidad Técnica de Babahoyo, la Universidad Nacional de Chimborazo y en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ha publicado varios textos básicos, solucionarios y un libro.

ISBN: 978-9942-14-228-3

